Grundlagen der Mathematik Prof. Dr. Thomas Thierauf
Sommersemester 2026 Fak. Elektronik und Informatik

Zusätzliche Übungsaufgaben - Blatt 7

---

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k = (n-1)\,2^{n+1} + 2$

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

Dabei ist $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1\, x_2 \cdots x_n$.

2. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $f(0) = 5$ und $f(n) = 3\,f(n-1)$, für $n \geq 1$.

a) Geben Sie $f(n)$ an, für $n = 1, 2, \ldots, 5$.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $f(n) = 5 \cdot 3^n$.

3. Auf einem Sparbuch ist ein Kapital von $K_0 = 1000$ Euro. Die Verzinsung beträgt $p = 5\%$ im Jahr. Sei K_n das Kapital nach n Jahren. Es gilt also: K_n ist 5% höher als K_{n-1}.

a) Stellen Sie eine Rekursionsformel für K_n auf.

b) Geben Sie eine geschlossene Form von K_n an und zeigen Sie die Korrektheit mit vollständiger Induktion.

c) Berechnen Sie K_{20}.

4. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \geq 4$:

a) $n^2 \geq 2n + 1$ b) $2^n \geq n^2$ c) $n! \geq 2^n$

5. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$

6. Ein Frosch springt über eine 3 Meter breite Straße. Beim ersten Sprung kommt er 1 Meter weit. Dabei ermüdet er, so dass er bei jedem folgenden Sprung nur noch 3/4 des vorherigen Sprunges erreicht.

a) Nach wievielen Sprüngen hat der Frosch die Straße überquert?

b) Der anschließende Gehweg ist 1 Meter breit. Nach wievielen Sprüngen hat der Frosch die Straße und den Gehweg überquert?

7. *Befindet sich unter n Tieren ein Elefant, dann sind alle diese Tiere Elefanten.* Wir beweisen dies durch Induktion über $n \geq 1$.

Induktionsanfang: Die Behauptung gilt offensichtlich für $n = 1$.

Induktionsschritt: Gelte die Behauptung für n Tiere und betrachten nun $n+1$ Tiere, wobei eines ein Elefant ist. Wir stellen die Tiere so in eine Reihe, dass unter den ersten n Tieren ein Elefant ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann die ersten n Tiere alles Elefanten. Damit befindet sich aber auch unter den letzten n Tieren ein Elefant, so dass diese auch alle Elefanten sind. Also sind alle $n + 1$ Tiere Elefanten. Das war zu zeigen.

Oder stimmt hier etwas nicht?