

Zusätzliche Übungsaufgaben - Blatt 6

1. Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$, und $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$ definiert durch $f(x) = ax + b$.

- a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.
- b) Geben Sie f^{-1} an.
- c) Zeigen Sie, dass f für $a = 0$ weder injektiv noch surjektiv ist.

2. Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3 + 1$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

3. Gegeben sind $\varphi, \psi \in S_4$ durch

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \varphi(k) & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \psi(k) & 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Geben Sie die Zyklendarstellungen von φ , ψ , φ^2 , $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ an.

4. Der Graph $G = ([5], E)$ besteht aus zwei Kreisen:

$$E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \cup \{(4, 5), (5, 4)\}.$$

- a) Geben Sie alle Potenzen G , G^2 , G^3, \dots von G an.
- b) Welche dieser Graphen stellen eine Funktion dar?
- c) Welche der Funktionen sind injektiv bzw. surjektiv?

5. Ein Array mit $n = 6$ Elementen enthält folgende Zahlen

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline A[k] & 15 & 21 & 4 & 13 & 34 & 12 \end{array}$$

Geben Sie eine Permutation $\pi \in S_6$ an, so dass $A[\pi(k)]$ aufsteigend sortiert ist, für $k = 1, 2, \dots, 6$. Ist dann $A[\pi^{-1}(k)]$ absteigend sortiert?

6. Geben Sie eine bijektive Funktion von $[n] \times [n]$ nach $[n^2]$ an, für $n \geq 1$. Geben Sie auch die Umkehrfunktion an.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 1, 2, 3$ und evtl. noch 4.

7. Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv ist,

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{falls } n \geq 0, \\ -(2n + 1), & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$