Zusätzliche Übungsaufgaben - Blatt 4

---

1. Geben Sie ein Beispiel für Mengen A und B an, so dass $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$.

2. Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$ durch seine Adjazenzmatrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie $D(E)$ und $W(E)$ an.

b) Geben Sie die Transponierte A^T an.

c) Berechnen Sie A^2 mit boolescher Matrizenmultiplikation.

d) Geben Sie einen längsten *einfachen* Weg in G an. D.h. dass jeder Knoten auf dem Weg höchstens einmal besucht wird.

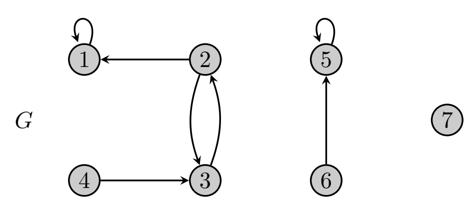
3. Für $n \geq 2$ definieren wir folgende Graphen. Die *Linien* (engl. *line*) $L_n = ([n], E_\ell)$ und die *Kreise* (engl. *cycle*) $C_n = ([n], E_c)$, wobei

$$\begin{aligned} E_\ell &= \{ (i, i+1) \mid i \in [n-1] \}, \\ E_c &= E_\ell \cup \{(n, 1)\}. \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie L_5^k, für $k = 1, 2, 3, \ldots$, und die transitive Hülle L_5^+.

b) Zeichnen Sie C_5^k, für $k = 1, 2, 3, \ldots$, und die transitive Hülle C_5^+.

4. Fügen Sie zum abgebildeten Graph $G = ([7], E)$ die minimale Anzahl von Kanten hinzu, so dass der resultierende Graph eine Äquivalenzrelation darstellt.



5. Geben Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge [3] an.

6. Geben Sie für folgende Relationen an, welche der Eigenschaften (R), (S) bzw. (T) gelten. Welche sind Äquivalenzrelationen?

a) $\{ (a, b) \mid a \neq b \}$ über $\mathbb{Z}$,

b) $\{ (a, b) \mid a + b = 1 \}$ über $\mathbb{Z}$,

c) $\{ (a, b) \mid a - b \text{ ist gerade} \}$ über $\mathbb{Z}$,

d) $\{ (a, b) \mid ab = 1 \}$ über $\mathbb{Q}$.

7. Wir definieren folgende Relation R über $\mathbb{Z}$: aRb, falls $a = b$ oder $a + b = 100$.

a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

b) Geben Sie die Äquivalenzklassen $[a]_R$ an, für $a \in \mathbb{Z}$.