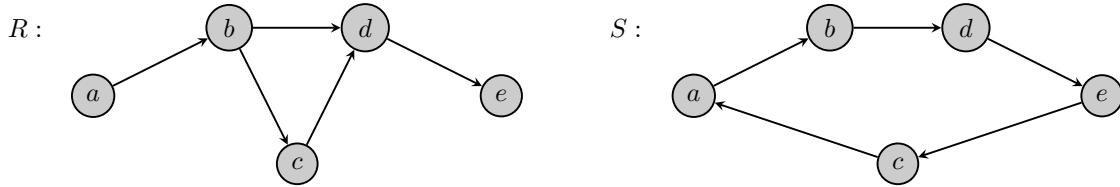


Zusätzliche Übungsaufgaben - Blatt 3

1. Sei $A = \{0, 1, \dots, 4\}$ und $B = \{0, 1, \dots, 5\}$. Die Relation $R \subseteq A \times B$ ist definiert als $R = \{(x, y) \mid y \leq 2x - 3\}$.

- Zeichnen Sie die Elemente von R und R^{-1} jeweils in ein Koordinatensystem ein.
- Geben Sie $D(R)$, $W(R)$, $D(R^{-1})$ und $W(R^{-1})$ an.

2. Die Relationen R und S über $A = \{a, b, c, d, e\}$ seien durch folgende Graphen gegeben.



Geben Sie an:

- $D(R)$, $W(R)$ und $D(S)$, $W(S)$,
- die Adjazenzmatrix von R^{-1} ,
- $R \circ S$ und $S \circ R$,
- R^2 und S^2 ,
- R^3 und S^3 ,
- $R^{-2} = (R^{-1})^2$.

3. Geben Sie einen Graph G mit 5 Knoten und 7 Kanten an, so dass gilt $G^2 = G$. Geben Sie G^{100} an.

4. Geben Sie Relationen R und S über einer Menge A an, so dass $(S \circ R)^{-1} \neq S^{-1} \circ R^{-1}$.

Die folgenden Aufgaben wiederholen Dinge, die Sie aus der Schule kennen

5. Basiswechsel bei Logarithmen. Seien $a, b > 1$. Zeigen Sie:

- Es gibt eine Konstante c , so dass für jedes $x > 0$ gilt: $\log_a x = c \log_b x$.
- $\log_{a^2} x = \frac{1}{2} \log_a x$

6. Die Darstellung einer natürlichen Zahl n im Zahlensystem zur Basis $b \geq 2$ hat die Form

$$n = n_0 + n_1 b + n_2 b^2 + \dots + n_{k-1} b^{k-1},$$

wobei die *Ziffern* n_i Zahlen im Bereich $0, 1, \dots, b - 1$ sind. Wir schreiben dann kurz: $n = (n_{k-1} n_{k-2} \dots n_1 n_0)_b$. Im Dezimalsystem, also für $b = 10$, lässt man üblicherweise die Basis weg und schreibt einfach $n = n_{k-1} n_{k-2} \dots n_1 n_0$. Ist die höchstwertige Ziffer $n_{k-1} \neq 0$, dann heißt die Anzahl k der Stellen von n auch die *Länge von n (zur Basis b)*.

- Geben Sie die Zahlen 10 und 20 im Zahlensystem zur Basis b an, für $b = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 16$.
- Habe n die Länge k zur Basis b . Zeigen Sie, dass dann gilt $b^{k-1} \leq n \leq b^k - 1$.
Folgern Sie daraus, dass $k = \lfloor \log_b n \rfloor + 1$ ist. Die Länge von n ist also logarithmisch in der Größe von n . Für eine reelle Zahl x ist dabei $\lfloor x \rfloor =$ die größte ganze Zahl $y \leq x$.
- Welche Länge hat eine 100-stellige Dezimalzahl im Binärsystem?