

Aufgabenblatt 8

<http://image.informatik.htw-aalen.de/~thierauf/>

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n :

a) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$

c) $\sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n + 1)^2/4$

b) $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)} = 1 - \frac{1}{n + 1}$

2. Geben Sie für folgende Summen jeweils eine geschlossene Formel an:

a) $\sum_{k=1}^n 2k$

b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$

c) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(-2)^k}$

3. *Alle natürlichen Zahlen sind gleich!* Wir beweisen dies durch eine Induktion über die Größe der Zahlen. Genauer gesagt beweisen wir induktiv über $n \geq 0$:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a, b \leq n \implies a = b.$$

Induktionsanfang: Die Behauptung gilt für $n = 0$, da aus $a, b \leq 0$ folgt $a = b = 0$.

Induktionsschritt: Gelte die Behauptung für jedes Zahlenpaar bis zur Größe n und sei nun $a, b \in \mathbb{N}$ ein beliebiges Paar mit $a, b \leq n + 1$. Wir definieren $a' = a - 1$ und $b' = b - 1$. Dann gilt $a', b' \leq n$, und somit nach Induktionsvoraussetzung $a' = b'$. D.h. es ist $a - 1 = b - 1$ und damit auch $a = b$. Das war zu zeigen.

Oder stimmt hier etwas nicht?

4. Die *Bernoullische Ungleichung* lautet für $x \geq -1$ und $n \geq 0$:

$$(x + 1)^n \geq 1 + nx$$

Zeigen Sie die Ungleichung durch Induktion über n .

5. Die Funktionen f, g und h sind rekursiv auf allen Zweierpotenzen definiert, also für alle n , die sich als $n = 2^k$ schreiben lassen, für ein $k \geq 0$.

$$f(1) = 0$$

$$g(1) = 0$$

$$h(1) = 2$$

$$f(n) = f(n/2) + 1$$

$$g(n) = 2g(n/2) + n$$

$$h(n) = 2h(n/2) + n^2$$

Zeigen Sie durch Induktion (über $k \geq 0$)

a) $f(n) = \log n$

b) $g(n) = n \log n$

c) $h(n) = 2n^2$.