Aufgabenblatt 7

http://image.informatik.htw-aalen.de/~thierauf/

---

1. Welche der folgenden vier Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Geben Sie bei den bijektiven Funktionen jeweils die Umkehrfunktion an.

a) $f_1(x) = 3x - 1$

b) $f_2(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{falls } x \geq 0 \\ x-3, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{falls } x \geq 0 \\ x-1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{falls } x \geq 0 \\ x+1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

2. Die Zahl 4016598732 enthält jede Ziffer genau einmal. Geben Sie die nächstgrößere Zahl mit dieser Eigenschaft an.

3. Sei $\varphi \in S_n$ eine Permutation die in ihrer Zyklendarstellung aus k Kreisen besteht. Wir definieren das *Vorzeichen* (engl. *sign*) *von* φ durch $\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^{n+k}$. Zeigen Sie:

a) Für die identische Permutation id gilt $\operatorname{sgn}(id) = 1$.

b) $\operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\varphi)$.

c) Eine Permutation $\tau \in S_n$ heißt *Tranposition* falls τ genau 2 Punkte vertauscht, d.h. $\tau(i) = j$ und $\tau(j) = i$, für zwei Punkte $i \neq j \in [n]$, und die restlichen Punkte identisch abbildet. Dann gilt $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

4. Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ definieren wir die *Permanente* und die *Determinante von* A durch

$$\begin{aligned} \operatorname{perm}(A) &= \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi(1)}\, a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\ \det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1,\pi(1)}\, a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Permanente und die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Zwei Graphen $G_1 = (V, E_1)$ und $G_2 = (V, E_2)$ heißen *isomorph*, wenn sie, bis auf Umbenennung der Knoten, gleich sind. D.h., dass es eine Permutation φ auf V gibt, so dass für alle Knoten $u, v \in V$ gilt: $(u, v) \in E_1 \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$.

Welche der folgenden Graphen G_1, G_2 und G_3 sind isomorph?