Vorlesung Analysis

Kapitel 2: Folgen

Inhalt

1. Exkurs: Ungleichungen
   - Satz: Rechenregeln für Ungleichungen
   - Definition: Der Absolutbetrag
   - Satz: Rechenregeln für den Absolutbetrag
   - Satz: Die Ungleichung von Bernoulli
2. Grundlagen von Folgen
   - Definition 1: Folge
   - Definition 2: Spezielle Folgen
3. Konvergenz von Folgen
   - Definition 3: Grenzwert, Konvergenz, Divergenz, Nullfolge
   - Definition 4: Uneigentlich konvergent, (un)bestimmt divergent

Inhalt

4. Grenzwerte von Folgen

Inhalt

Satz: Rechenregeln für Ungleichungen

Sei $a \leq A$, dann gilt:

a) Addition: $a + b \leq A + b$

b) Subtraktion: $a - b \leq A - b$

c) Multiplikation: $Für\ b \geq 0:\ a \cdot b \leq A \cdot b$

$Für\ b \leq 0:\ a \cdot b \geq A \cdot b$ b ist negativ, daher dreht sich die Ungleichung

d) Division: $Für\ b > 0:\ \frac{a}{b} \leq \frac{A}{b}$

$Für\ b < 0:\ \frac{a}{b} \geq \frac{A}{b}$ b ist negativ, daher dreht sich die Ungleichung

Satz: Rechenregeln für Ungleichungen (Forts.)

Sei $b \leq B$, dann gilt:

e) Addition: $a + b \leq a + B$

f) Subtraktion: $a - b \geq a - B$ Ungleichung dreht sich, da $-b \geq -B$

g) Multiplikation: $Für\ a \geq 0\!: a \cdot b \leq a \cdot B$

$Für\ a \leq 0: a \cdot b \geq a \cdot B$ a ist negativ, daher dreht sich die Ungleichung

h) Division: Ist $b > 0\ und\ B > 0$ oder $b < 0\ und\ B < 0$:

$Für\ a \geq 0\!: \frac{a}{b} \geq \frac{a}{B}$

$Für\ a \leq 0\!: \frac{a}{b} \leq \frac{a}{B}$ a ist negativ, daher dreht sich die Ungleichung

Beispiel: Rechenregeln für Ungleichungen für $b \leq B$

Sei $a = -4\,,\ b = 2,\ B = 3$

e) Addition: $(-4) + 2 \leq (-4) + 3 \ \Leftrightarrow -2 \leq -1$

f) Subtraktion: $(-4) - 2\ \geq (-4) - 3\ \Leftrightarrow -6 \geq -7$

g) Multiplikation: $a \leq\ 0,\ daher\ gilt\colon\ a\ \cdot\ b \geq a\ \cdot B$

$(-4) \cdot 2 \geq (-4) \cdot 3 \Leftrightarrow -8 \geq -12$

h) Division: $b > 0\ und\ B\ > 0\ und\ \ a \leq\ 0,\ daher\ gilt\colon$

$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{B}$

$\frac{(-4)}{2} \leq \frac{-4}{3} \Leftrightarrow -2 \leq -\frac{4}{3} \approx -1{,}333$

Beispiel: Wichtige Ungleichung

Daraus ergibt sich eine wichtige Ungleichung:

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \; für \; n \in \mathbb{N}$$

Beispiel: n = 5:

$$1 - \frac{1}{5} < 1 - \frac{1}{5+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{5} < 1 - \frac{1}{6}$$

$$\underbrace{1-0{,}2}_{0{,}8} < \underbrace{1 - 0{,}16667}_{0{,}833}$$

Definition: Der Absolubetrag

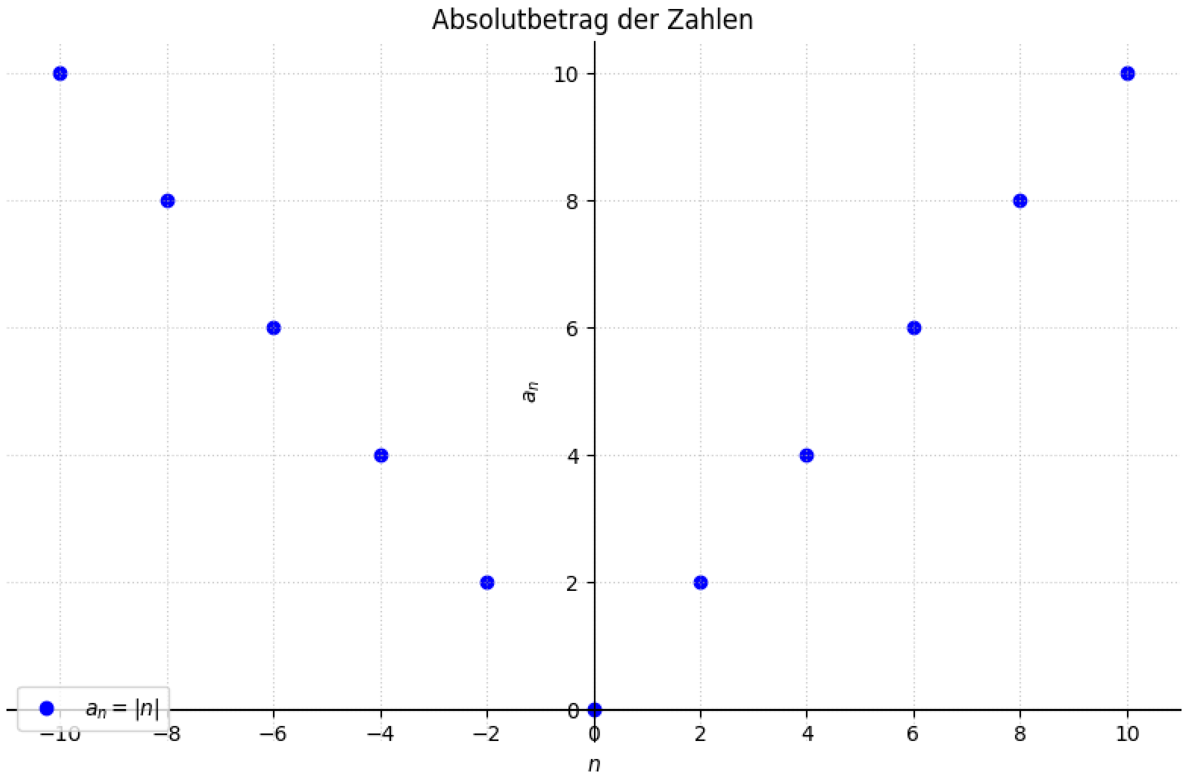
Für eine reelle Zahl x wird ihr Absolutbetrag definiert durch:

$$|x| := \begin{cases} -x, & f\text{ür } x < 0 \\ x, & f\text{ür } x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x| := \max(x, -x)$$

Beispiele:

$$|7| = 7$$

$$|-9| = -(-9) = 9$$



Satz: Rechenregeln für den Absolutbetrag

Seien $x, y \in \mathbb{R}$

$a)$ $|x| \geq 0 \; \forall \; x$ und $|x| = 0 \; für \; x = 0$

$b)$ $|-x| = |x|$

$c)$ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

d) Für $y \neq 0$ gilt:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Satz: Rechenregeln für den Absolutbetrag (Forts.)

e) Die Dreiecksungleichung lautet:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

f) Die umgekehrte Dreiecksungleichung lautet:

$$|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

g) $|x - y| \geq |x| - |y| \; und \; |x + y| \geq |x| - |y|$

Satz: Die Ungleichung von Bernoulli

Für $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, a \geq -1$ gilt: $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Beweisen Sie diese Ungleichung mittels vollständiger Induktion.

Definition 1: Folge

a) Eine <u>Folge</u> (a_n) ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet.

b) Bezeichnung der Glieder $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$

Beispiele:

- $a_n := 2^n$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{a_n} = \{2, 4, 8, \dots\} \Rightarrow \mathrm{a_1} = 2, \mathrm{a_2} = 4, \dots$
- $b_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{b_n} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \Rightarrow \mathrm{b_1} = \frac{1}{1} = 1,\ b_2 = \frac{1}{2}, \dots$
- $c_n := \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c_\mathrm{n} = \left\{\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, ..\right\} \Rightarrow \mathrm{c_1} = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{2}{3}, \dots$

Definition 2: Spezielle Folgen

a) Eine Folge $a_n \; n \in \mathbb{N}$ ist arithmetisch, geometrisch oder alternierend, wenn gilt:

Bezeichnung	Eigenschaft $\forall\, n \in \mathbb{N}$	für ein festes	Beispiele
arithmetisch	$a_{n+1} - a_n = d$	$d \in \mathbb{R}$	
geometrisch	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ $\Leftrightarrow a_{n+1} = q \cdot a_n$	$q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$	
alternierend	$a_{n+1} \cdot a_n < 0$		

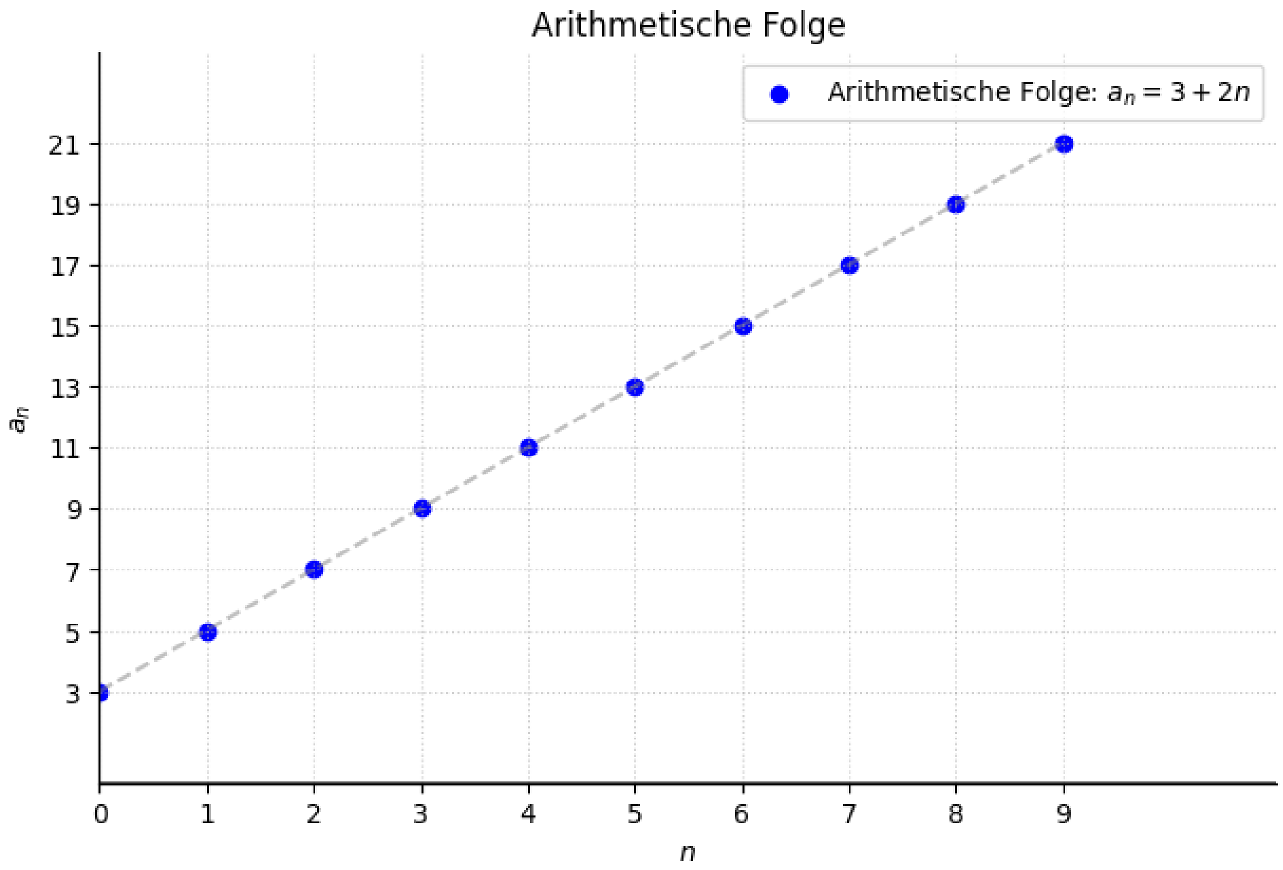
Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

a) Arithmetische Folgen:

Eine Folge a_n ist arithmetisch, wenn es eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

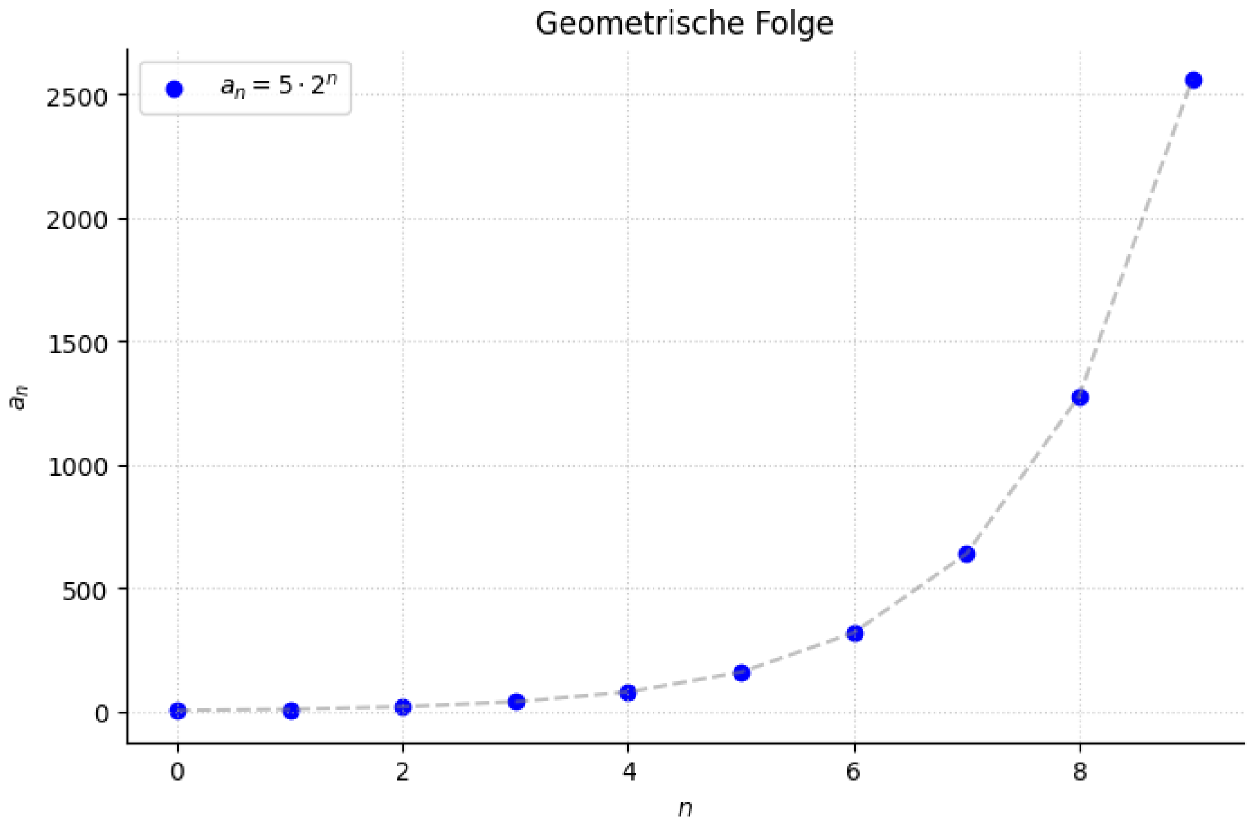
- Beispiel:
  - $a_n = 3 + 2n \; mit \; d = 2$
  - Startwert 3
  - konstante Differenz 2



Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

a) Geometrische Folgen:

Eine Folge a_n ist geometrisch, wenn es eine Konstante $q \in \mathbb{R}, q \neq 0$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} = q \cdot a_n$

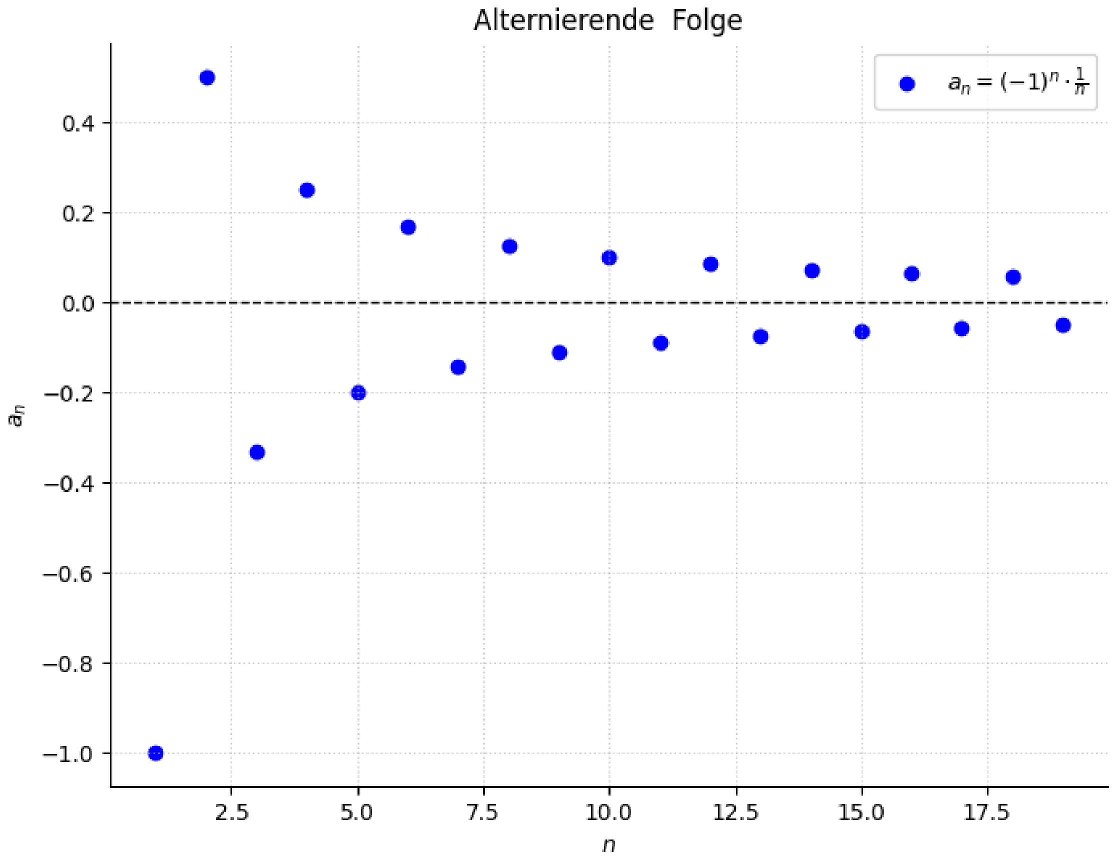


- Beispiel:
  - $a_n = 5 \cdot 2^n \; mit \; q = 2$
  - Startwert 5
  - konstantes Verhältnis 2

Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

a) Alternierende Folgen:

Eine Folge a_n ist alternierend, wenn ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \cdot a_n < 0$



- Beispiel:
  - $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

b) Eine Folge a_n $n \in \mathbb{N}$ heißt <u>(streng) monoton</u>, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

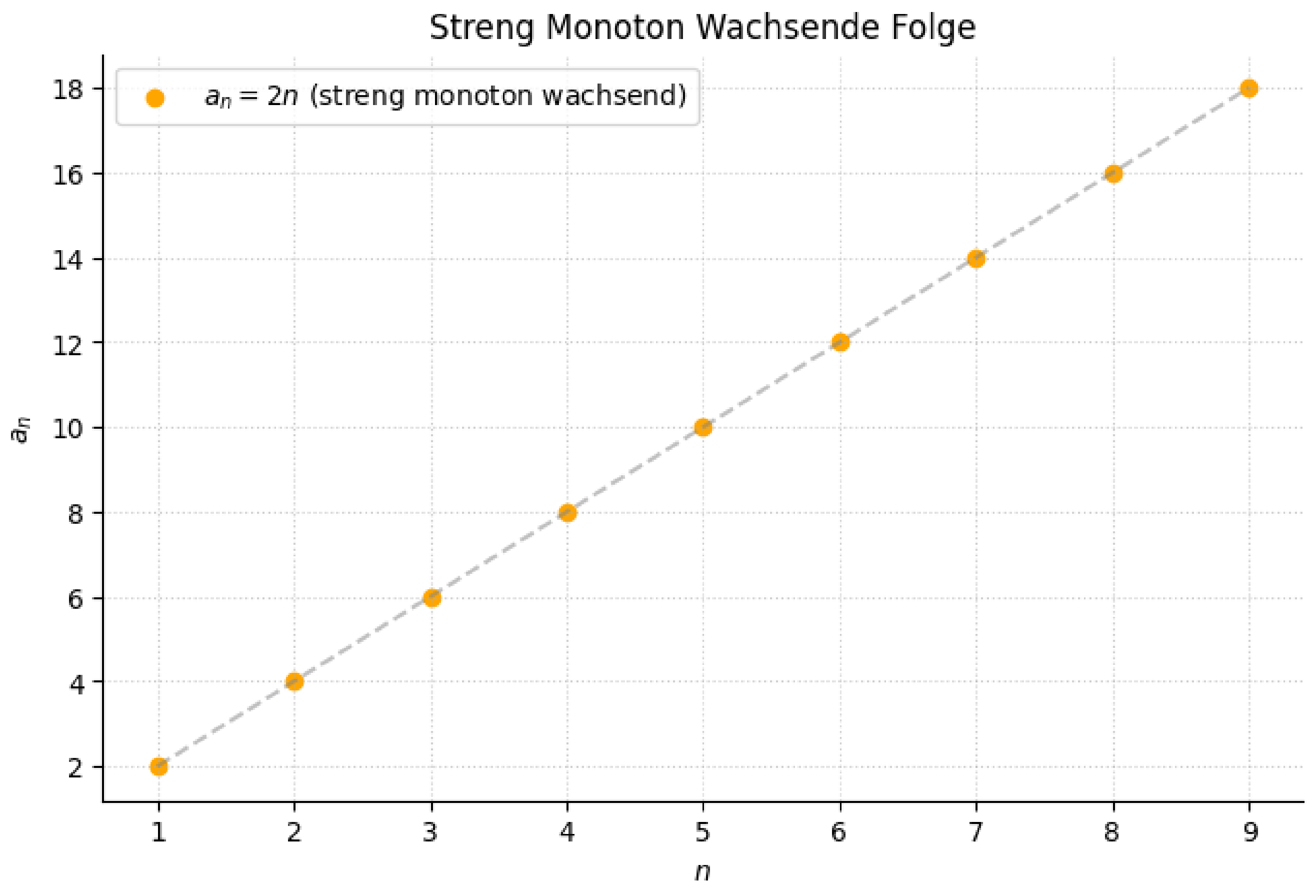
Bezeichnung	Eigenschaft $\forall\, n \in \mathbb{N}$	für ein festes	Beispiele
(streng) monoton wachsend	$(a_{n+1} > a_n)$ $a_{n+1} \geq a_n$		
(streng) monoton fallend	$(a_{n+1} < a_n)$ $a_{n+1} \leq a_n$		

Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

b) Monotonie von Folgen:

Eine Folge a_n $n \in \mathbb{N}$ heißt (streng) monoton wachsend, wenn gilt:

- $(a_{n+1} > a_n)$
- $a_{n+1} \geq a_n$



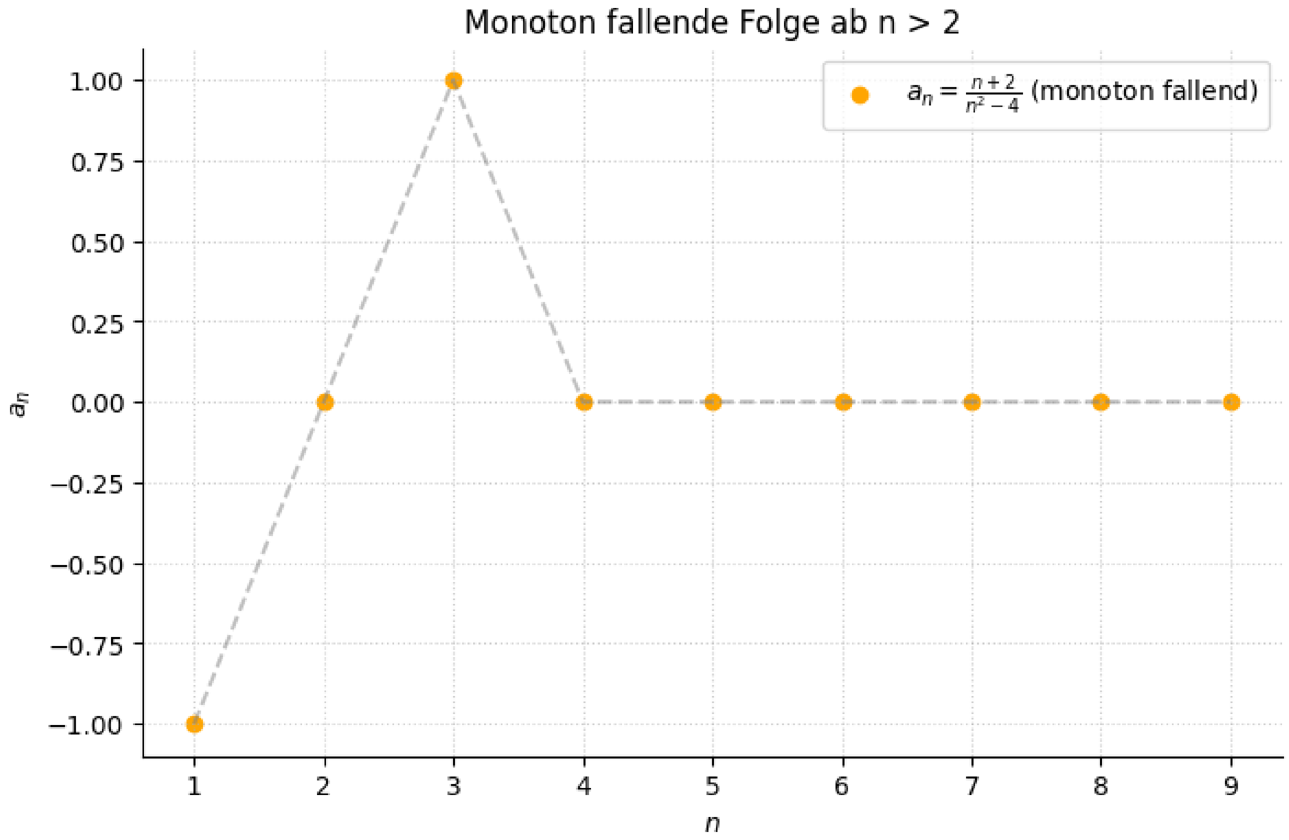
- Beispiel:
  - Streng monoton wachsend : $a_n = 2n$

Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

b) Monotonie von Folgen:

Eine Folge a_n $n \in \mathbb{N}$ heißt (streng) monoton fallend, wenn gilt:

- $(a_{n+1} < a_n)$
- $a_{n+1} \leq a_n$



- Beispiel:
  - Monoton fallend : $a_n = \frac{n+2}{n^2-4}$ $f\ddot{u}r\ n > 2$

Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

c) Eine Folge a_n $n \in \mathbb{N}$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Bezeichnung	**Eigenschaft** $\forall\, n \in \mathbb{N}$	**für ein festes**	**Beispiele**
nach oben beschränkt	$a_n \leq c$	$c \in \mathbb{R}$	
nach unten beschränkt	$a_n \geq c$	$c \in \mathbb{R}$	
beschränkt	$-c \leq a_n \leq c$ $\Leftrightarrow \lvert a_n \rvert \leq c$	$c > 0$	

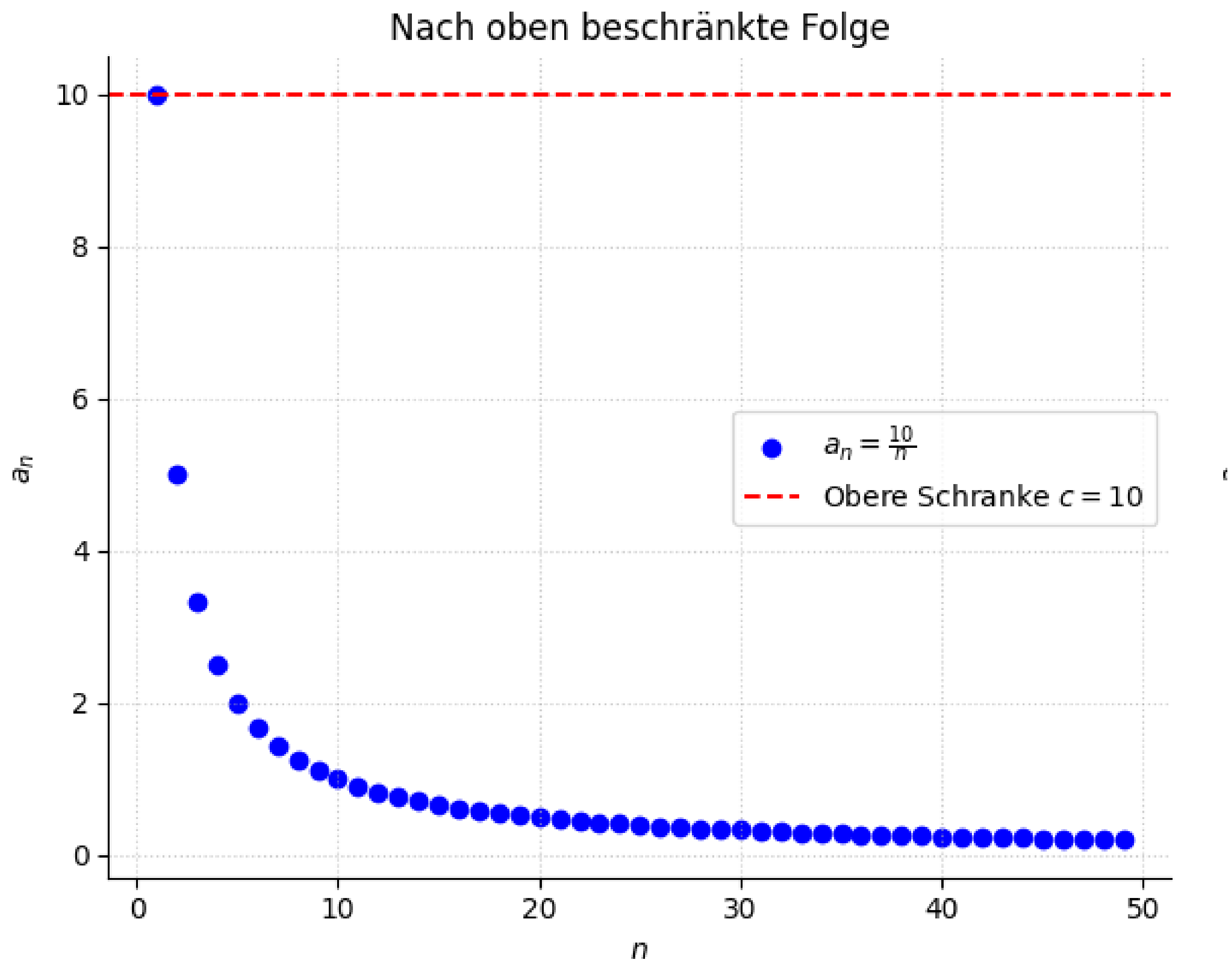
Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

Beschränktheit von Folgen:

Eine Folge a_n $n \in \mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt,

wenn es eine Schranke $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$a_n \leq c$$



- Beispiel:
  - $a_n = \frac{10}{n}$
  - Nach oben beschränkt durch 10.

Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

Beschränktheit von Folgen:

Eine Folge $\mathrm{a_n}$ $n \in \mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt,

wenn es eine Schranke $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$a_n \geq c$$

- Beispiel:
  - $a_n = -\frac{5}{n}$
  - Nach unten beschränkt durch -5

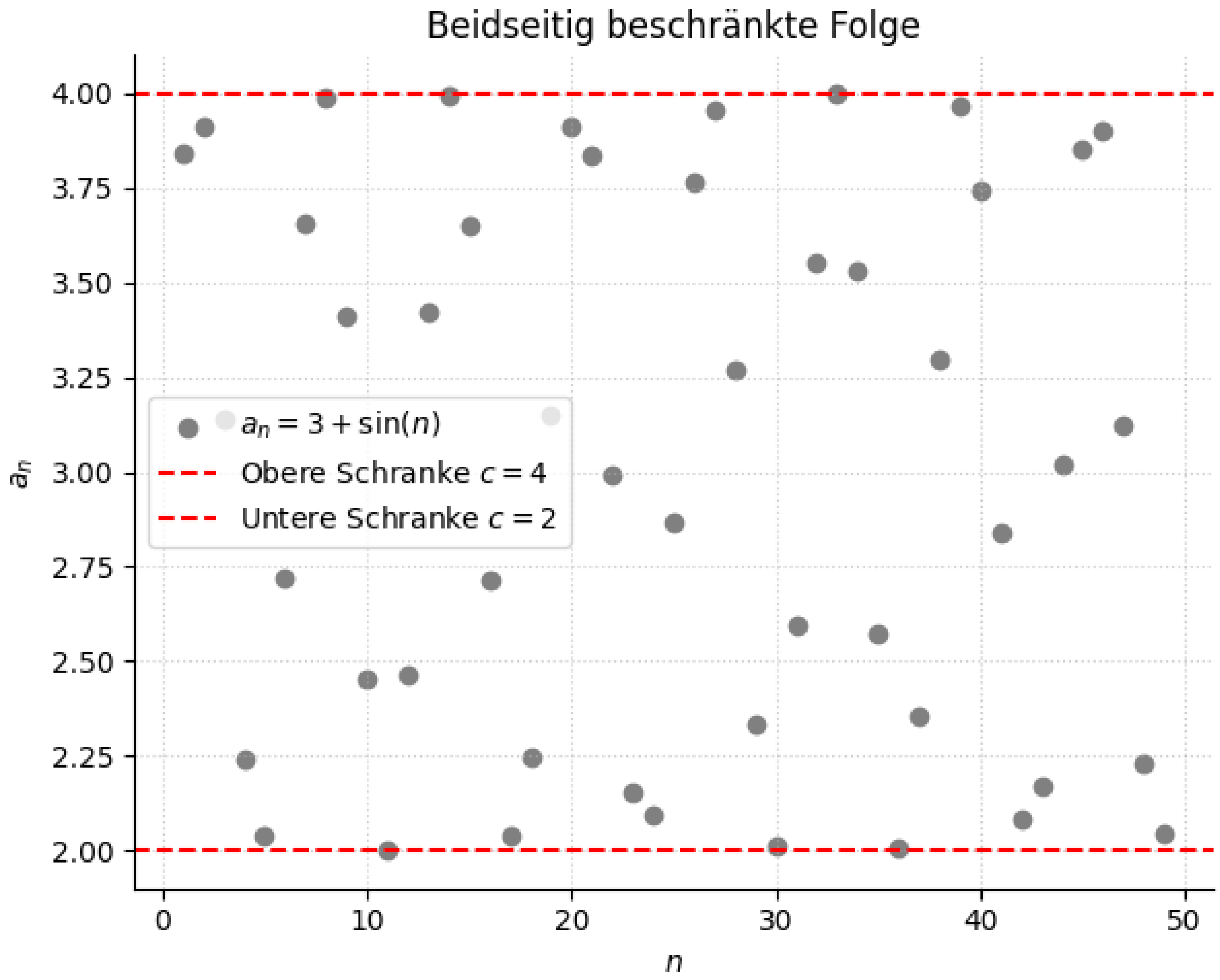
Definition 2: Spezielle Folgen (Forts.)

Beschränktheit von Folgen:

Eine Folge a_n $n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt, wenn es eine Schranke $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$-c \leq a_n \leq c$$

$$\Leftrightarrow \ |a_n| \leq c$$



- Beispiel:
  - $a_n = 3 + \sin(n)$
  - Ist zwischen 2 und 4 beschränkt.

Definition 3: Grenzwert, Konvergenz, Divergenz, Nullfolge

a) Eine Folge a_n heißt <u>konvergent</u>, wenn sie einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt, das heißt:

Für alle $\mathcal{E} > 0$ existiert ein zugehöriges $N(\mathcal{E}) > 0$, sodass gilt: $|a_n - a| < \mathcal{E} \; für \; alle \; n > N(\mathcal{E})$.

Schreibweisen:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

$$\Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$$

$$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \; \exists \, N(\mathcal{E}) > 0 \; \forall \, n > N(\mathcal{E}) : |a_n - a| < \mathcal{E}$$

Hinweis: $\mathcal{E} > 0$ ist immer eine positive reelle Zahl (auch wenn noch so klein) und n eine natürliche Zahl.

Definition 3: Grenzwert, Konvergenz, Divergenz, Nullfolge (Forts.)

b) Eine Folge a_n heißt <u>divergent</u>, wenn sie keinen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt, das heißt:

Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\mathcal{E} > 0$, sodass es für alle $N(\mathcal{E}) > 0$ ein $n > N(\mathcal{E})$ gibt, für das gilt:

$|a_n - a| \geq \mathcal{E}$.

$\lim_{n \to \infty} a_n$ existiert nicht

c) Eine Folge a_n heißt <u>Nullfolge</u>, wenn sie den Grenzwert $a = 0$ besitzt.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Beispiel 1: Konvergenz einer Folge

Welchen Grenzwert besitzt die Folge $a_n = \frac{1}{n}$?

Vermute Grenzwert a = 0.

<u>Beweis</u>:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

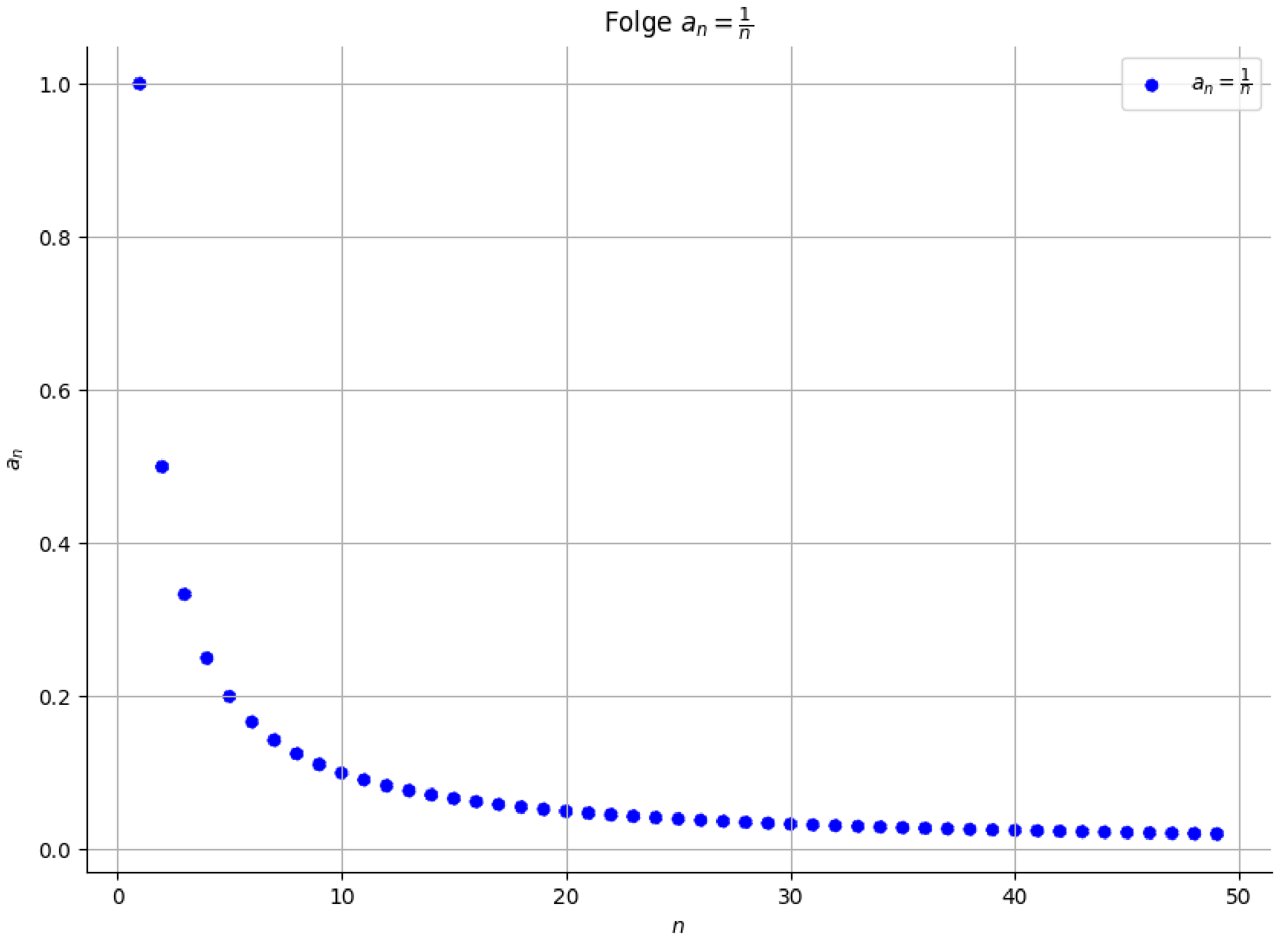
$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

d.h.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow 1 < n\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle daher $\mathrm{N}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$

Dann gilt für alle $n > N(\mathcal{E})$: $|a_n - a| < \mathcal{E}$.



Beispiel 1: Konvergenz einer Folge (Forts.)

Folge $a_n = \frac{1}{n}$

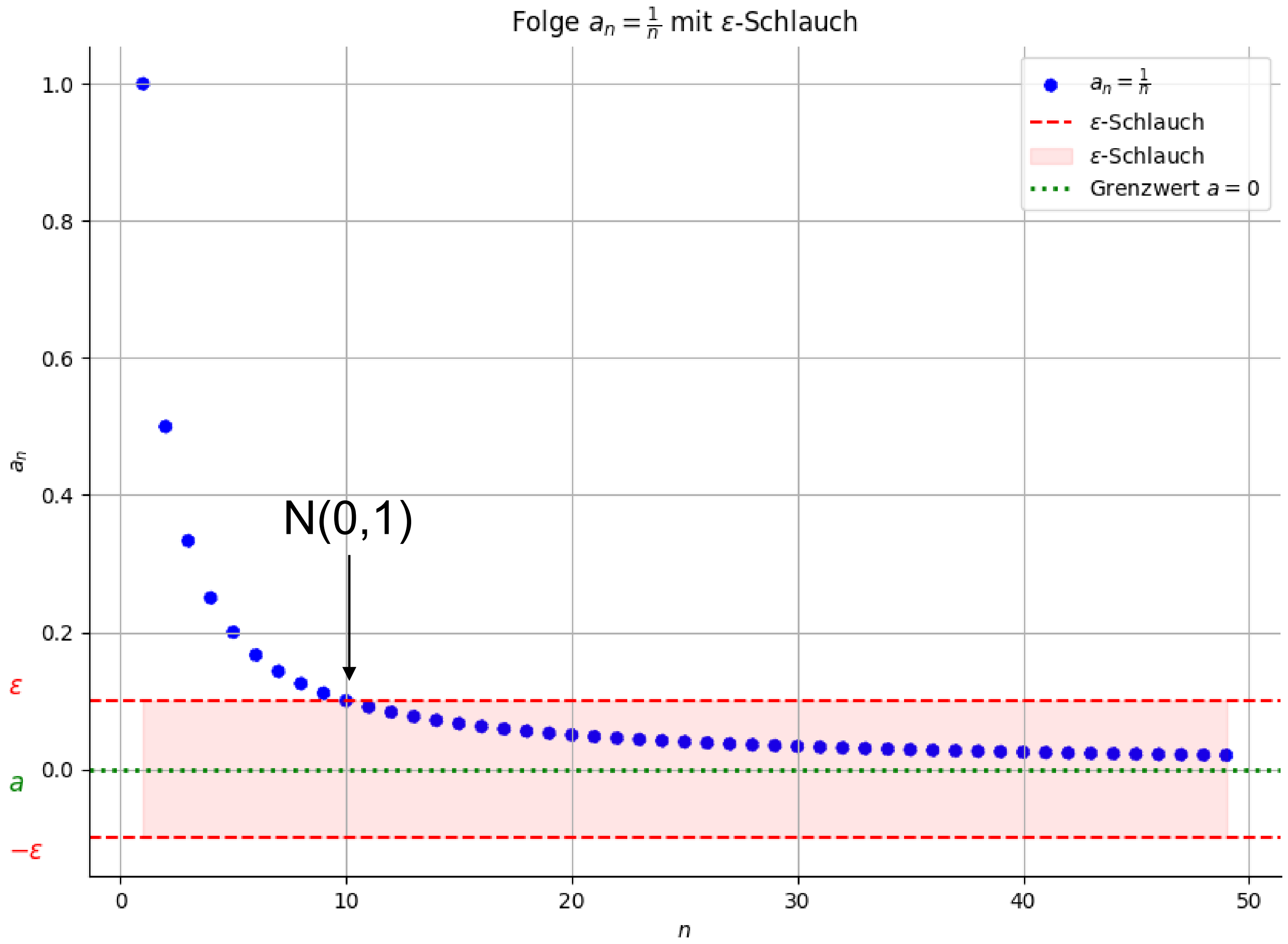
Grenzwert a = 0

Somit gilt: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Zum Beispiel ε = 0,1

$$\Rightarrow \ \mathrm{N}(0{,}1) = \frac{1}{0{,}1} = 10$$

D.h. für alle $n > 10$ gilt $\frac{1}{n} < 0{,}1.$

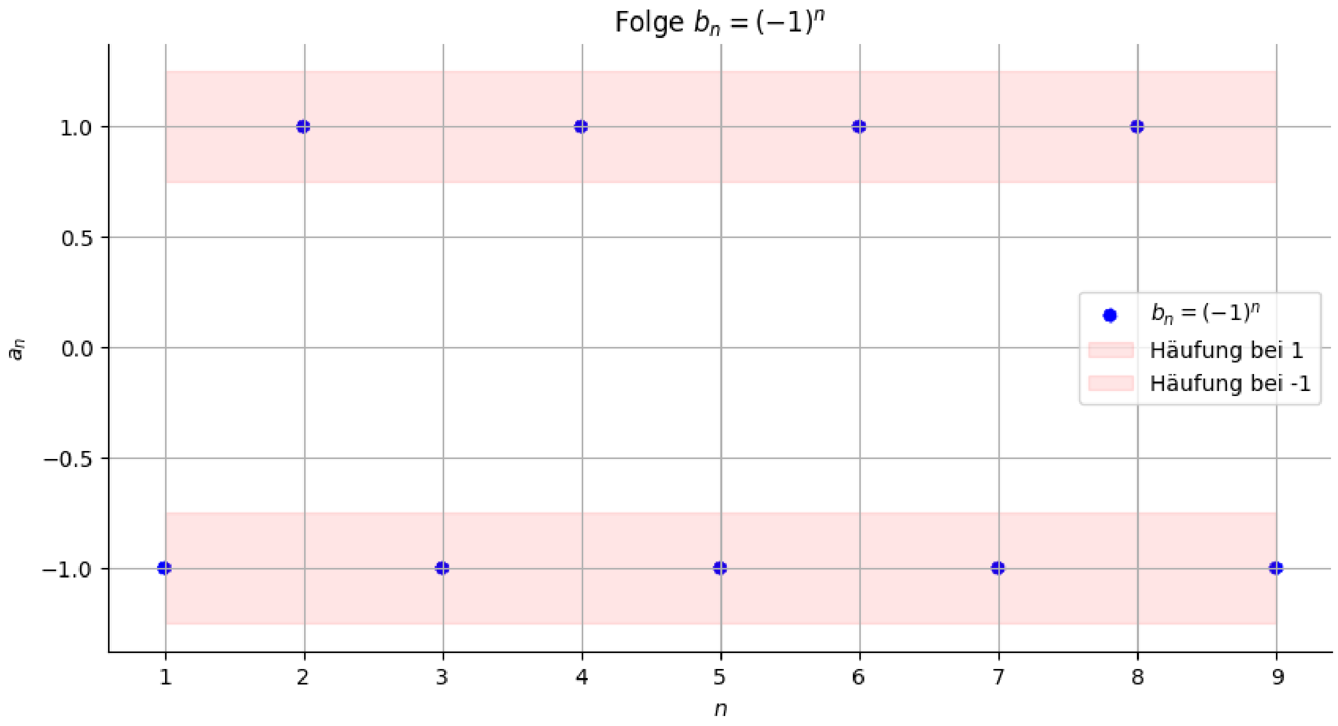


Beispiel 2: Konvergenz einer Folge

Welchen Grenzwert besitzt die Folge $b_n = (-1)^n$?

Die Folge besitzt keinen Grenzwert,

d. h. sie ist divergent.



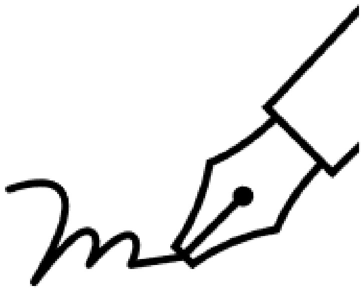
Beispiel 3: Beweis Grenzwert von Folgen

Beweisen Sie, dass folgende Folgen einen Grenzwert besitzen.

a) $a_n = \frac{2n+1}{3n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{2}{3} = a$

b) $a_n = \frac{2n+1}{3n+4}$

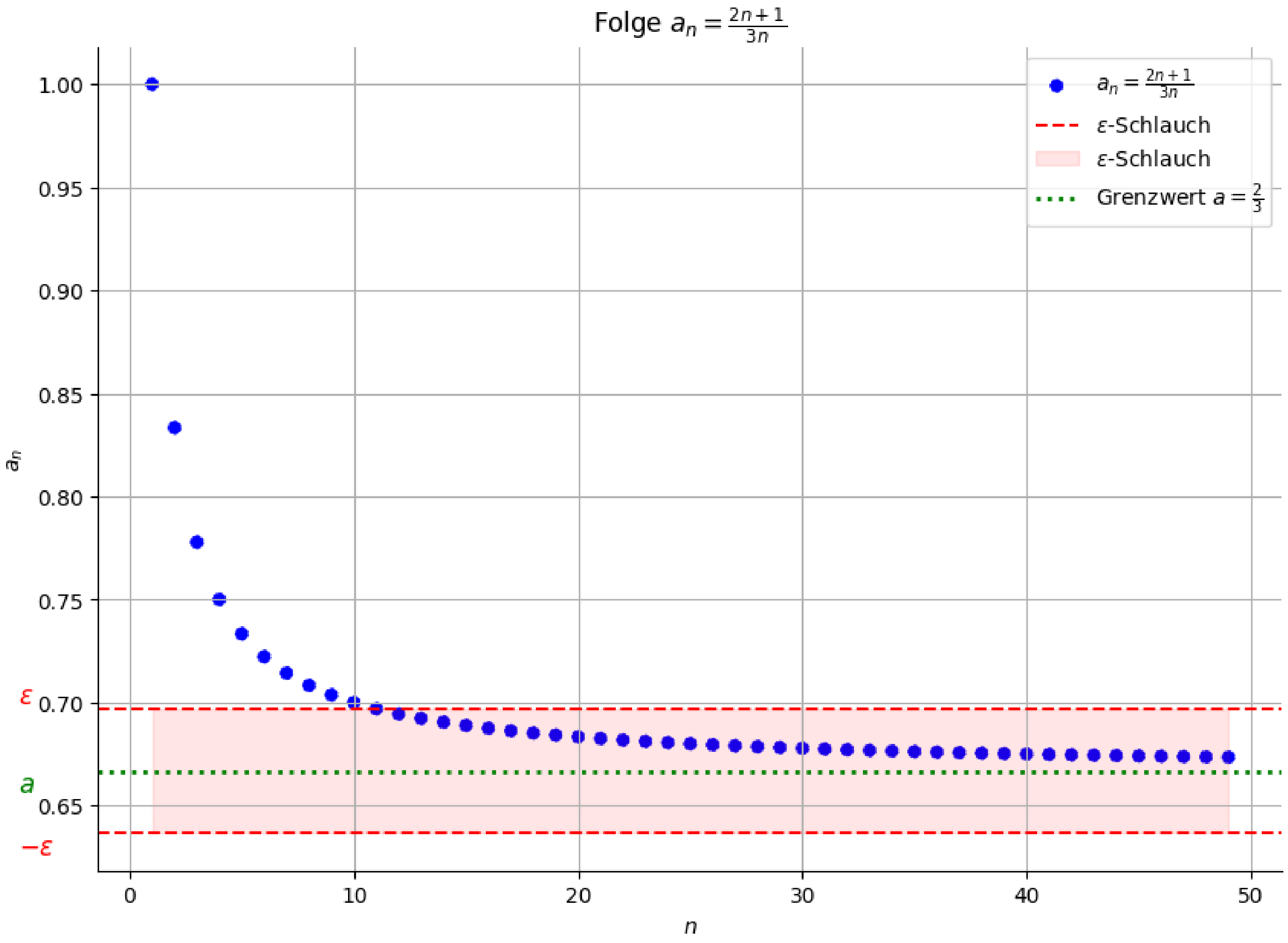
$c)$ $a_n = \frac{2n+1}{3n-4}$



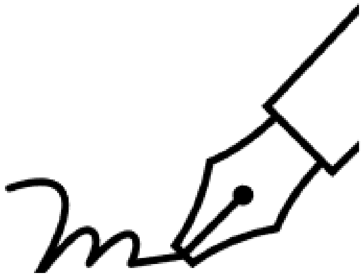
Beispiel 3: Beweis Grenzwert von Folgen

Beweisen Sie, dass folgende Folgen einen Grenzwert besitzen.

a) $a_n = \dfrac{2n+1}{3n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{2}{3} = a$

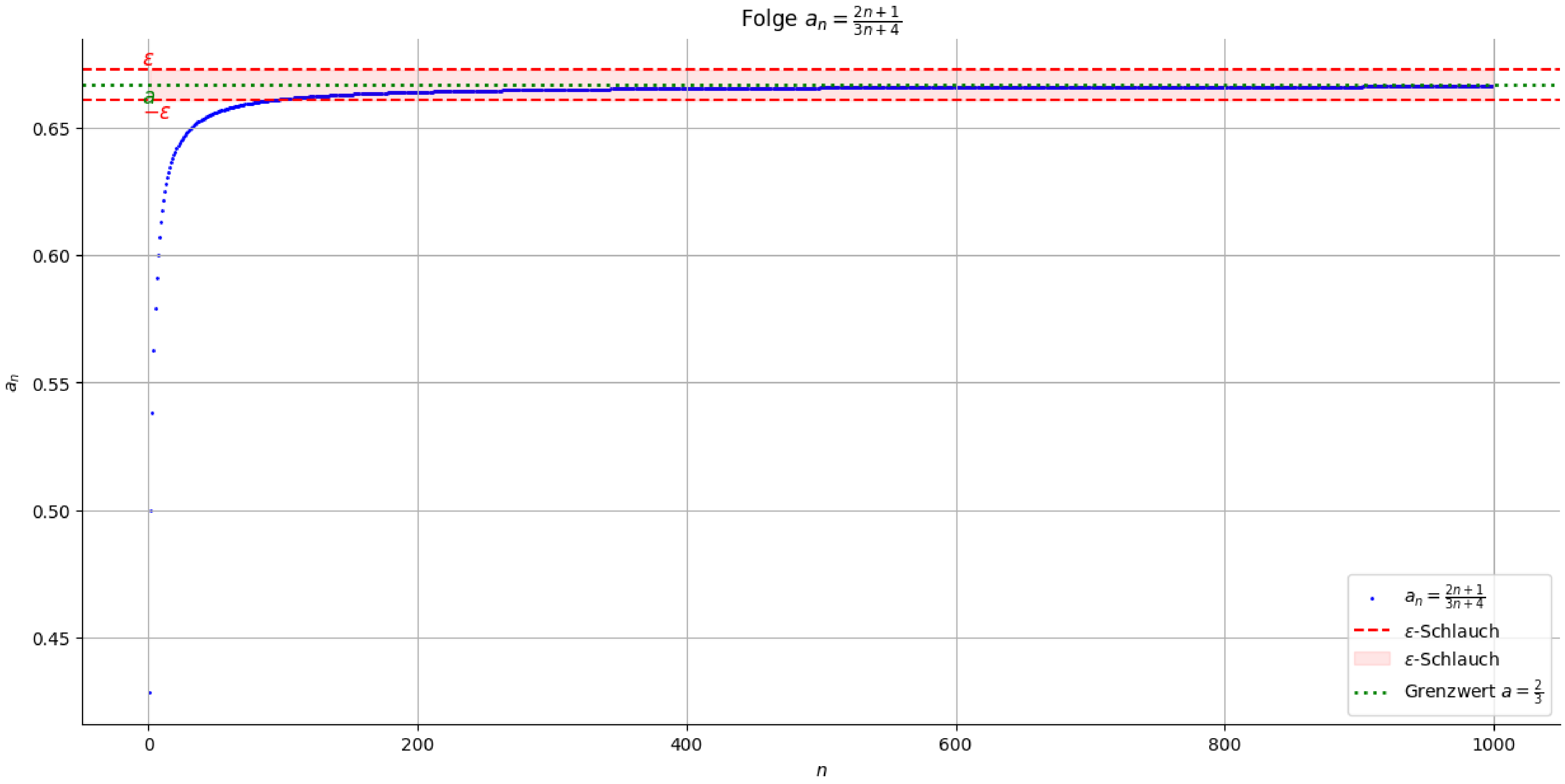


Beispiel 3: Beweis Grenzwert von Folgen



Beweisen Sie, dass folgende Folgen einen Grenzwert besitzen.

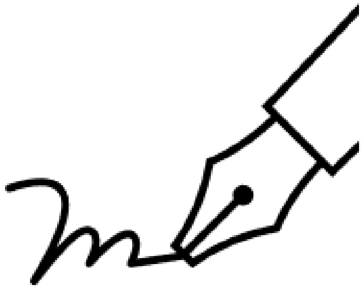
b) $a_n = \frac{2n+1}{3n+4}$

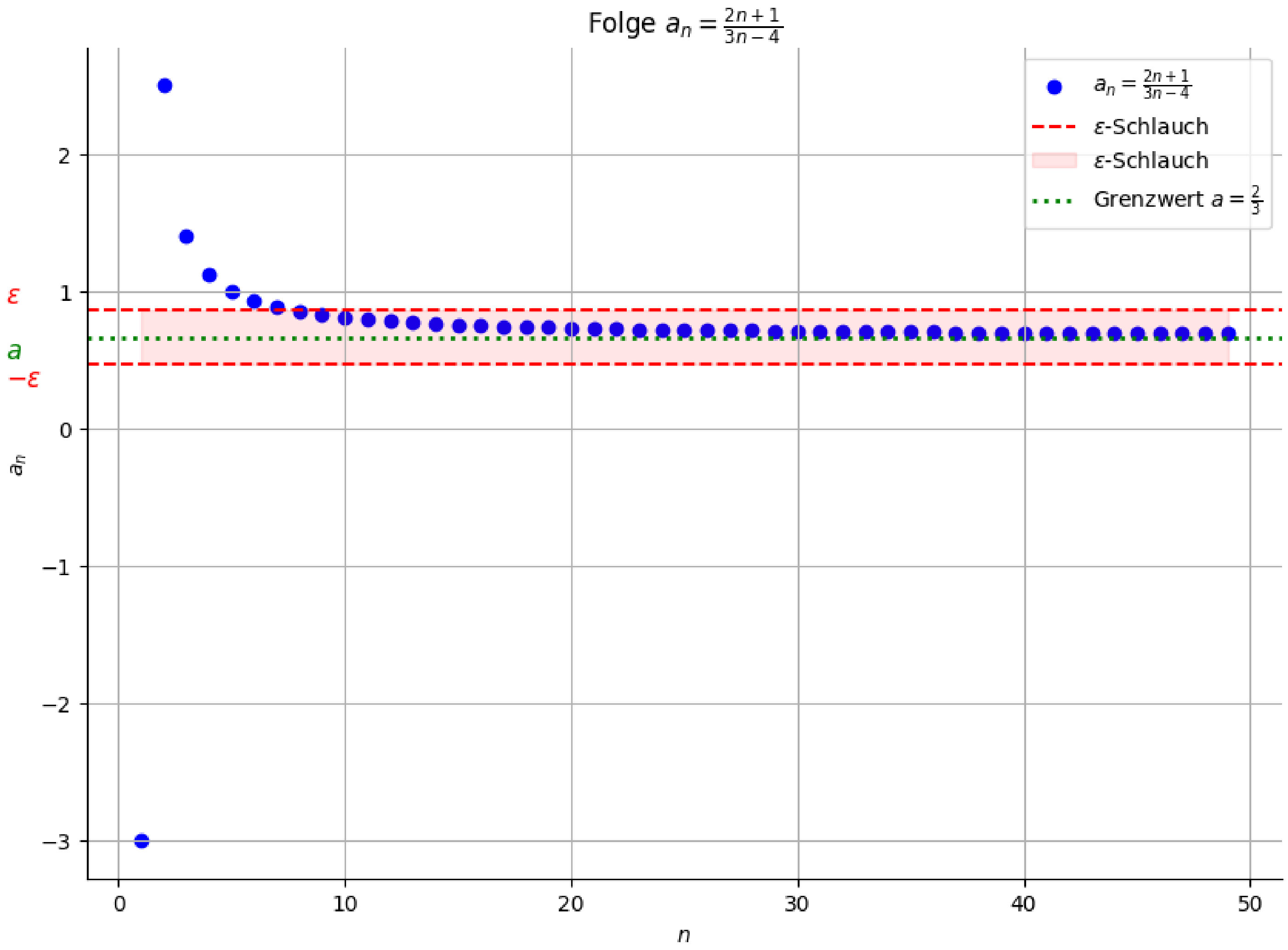


Beispiel 3: Beweis Grenzwert von Folgen

Beweisen Sie, dass folgende Folgen einen Grenzwert besitzen.

c) $a_n = \frac{2n+1}{3n-4}$





Definition 4: Uneigentlich konvergent, (un)bestimmt divergent

a) Eine Folge (a_n) heißt uneigentlich konvergent oder bestimmt divergent, wenn gilt:

- Zu jedem $A \in \mathbb{R}$ mit $A > 0$ gibt es ein $N(A) > 0$, sodass gilt: $a_n > A \ \forall\, n > N(A)$.

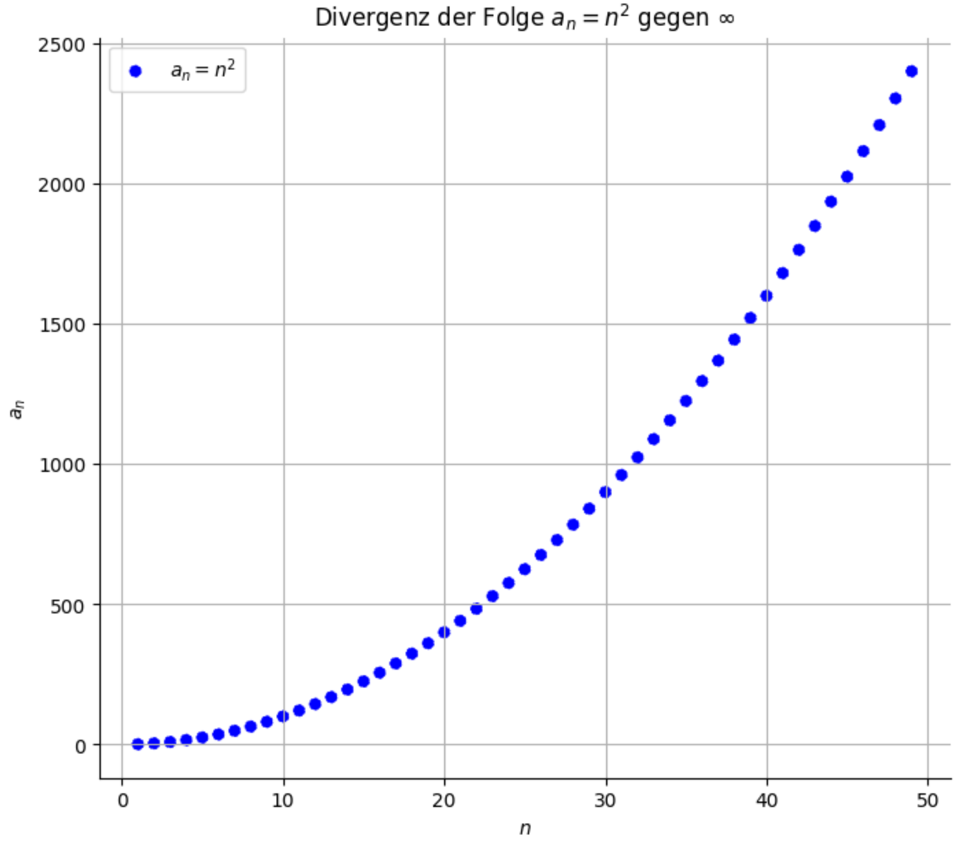
  Das heißt, die Folge (a_n) besitzt einen unendlichen Grenzwert $+\infty$.

  Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

Beispiel:

$a_n = n^2$

Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

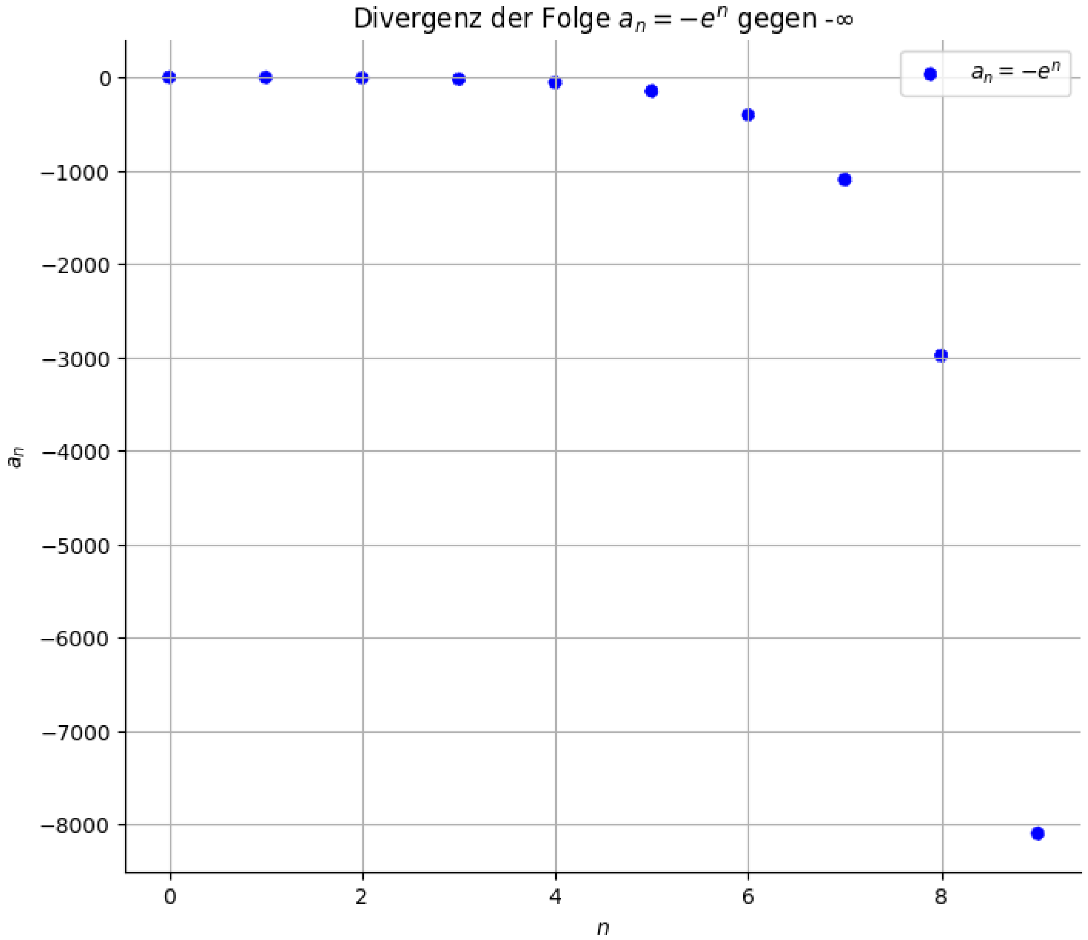


Definition 4: Uneigentlich konvergent, (un)bestimmt divergent (Forts.)

- Zu jedem $A \in \mathbb{R}$ mit $A < 0$ gibt es ein $N(A) > 0$, sodass gilt: $a_n < A \ \forall \, n > N(A)$.

  Das heißt, die Folge (a_n) besitzt einen unendlichen Grenzwert - ∞.

  Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$



Beispiel:

$a_n = -e^n$

Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} -e^n = -\infty$

Definition 4: Uneigentlich konvergent, (un)bestimmt divergent (Forts.)

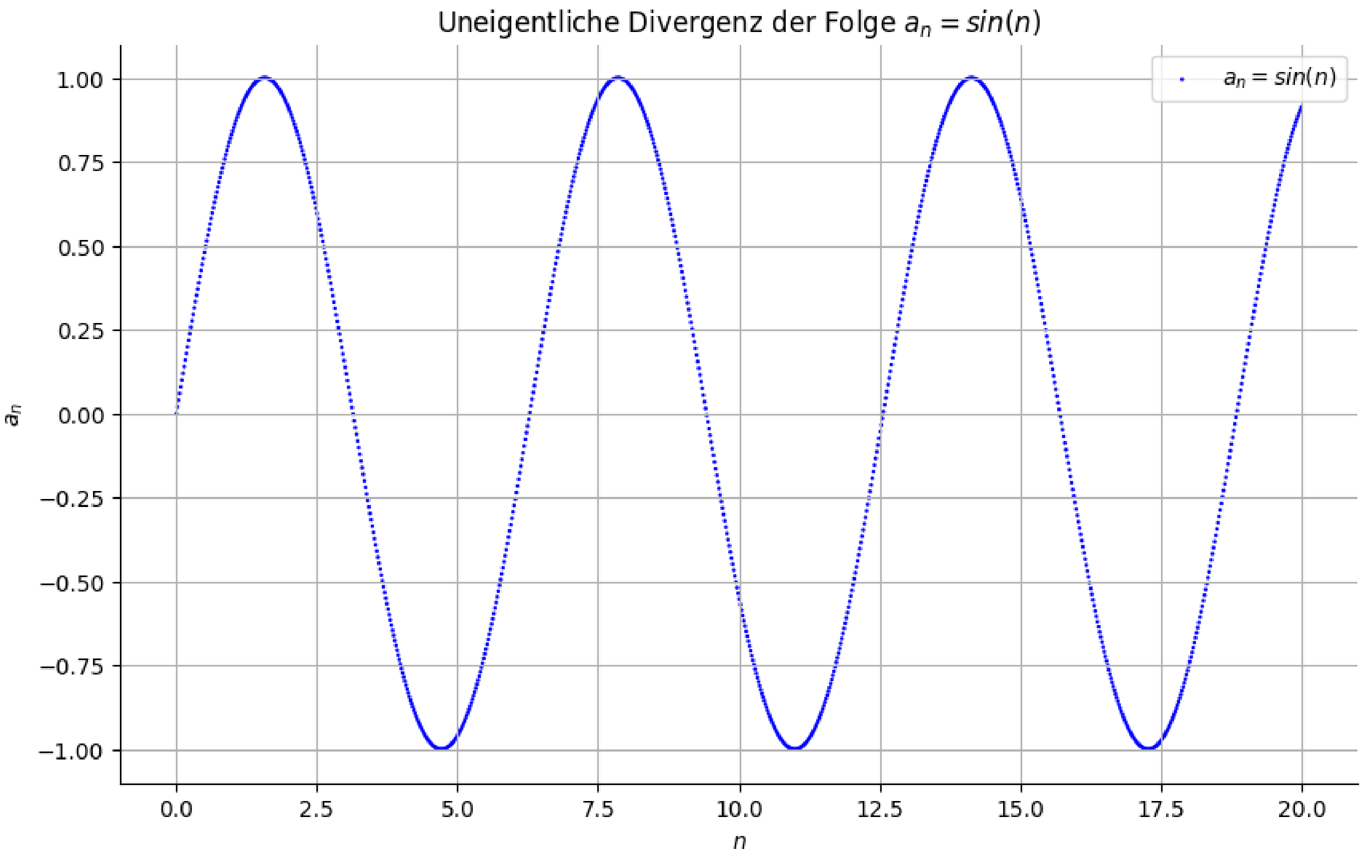
b) Eine Folge (a_n) heißt <u>unbestimmt divergent</u>, wenn sie weder konvergent noch bestimmt divergent ist.

<u>Beispiel:</u>

$a_n = \sin(n)$

Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} \sin(n) = kein\ Grenzwert$

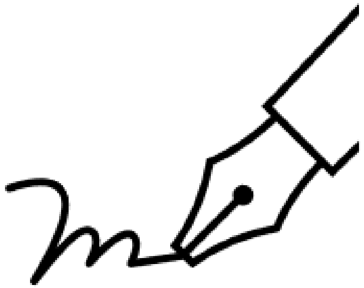
Folge ist unbestimmt divergent.



Beispiel 4: Beweis einer bestimmt divergenten Folge

Beweisen Sie, dass folgende Folge bestimmt divergent ist.

$$a_n = \frac{2n^2+1}{3n+4}$$



Beispiel 4: Beweis einer bestimmt divergenten Folge (Forts.)

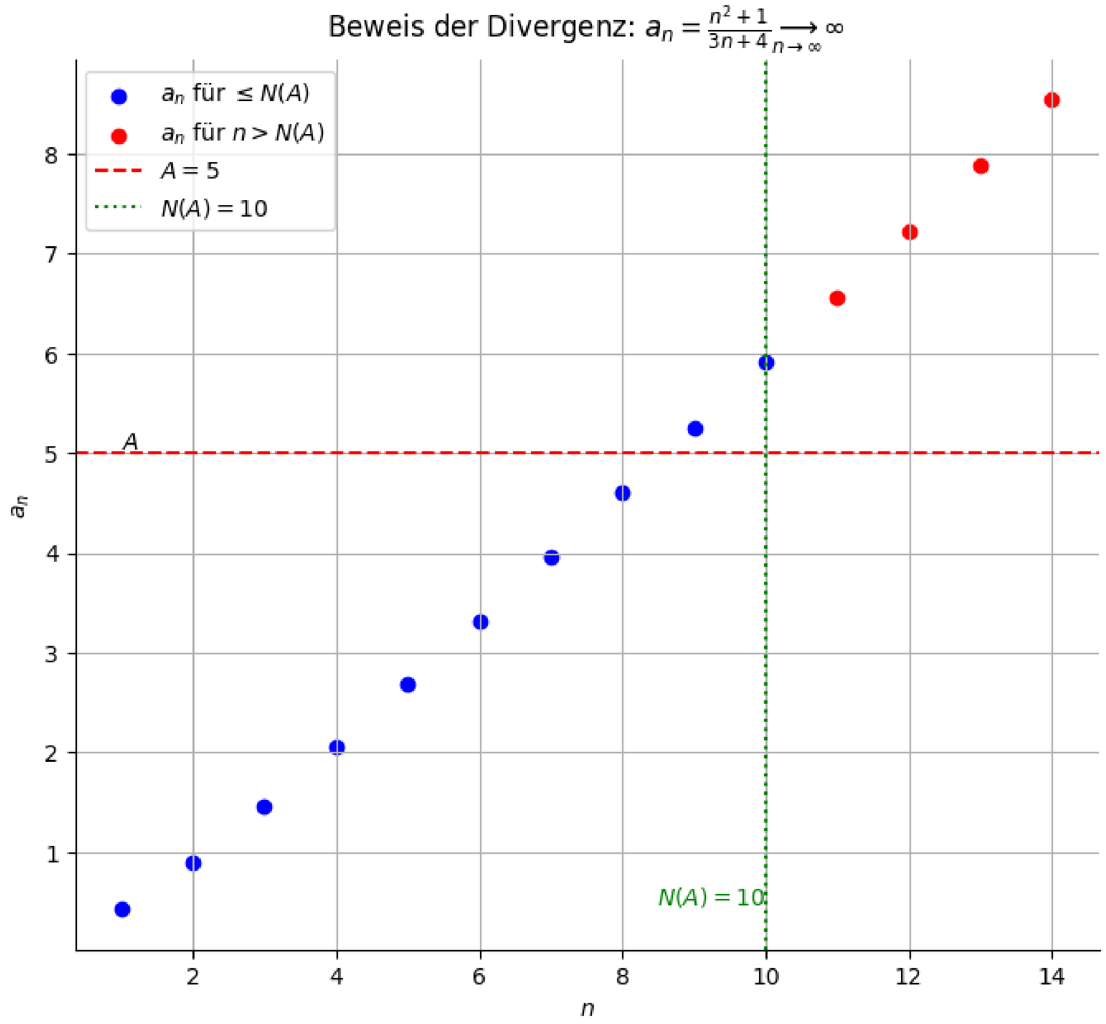
Was bedeutet jetzt $N(A) = \max(4, 2A)$?

Für ein gegebenes $A > 0$ muss das kleinste n bestimmt werden, ab dem garantiert **alle** Folgenglieder größer als A sind.

Ist $A = 1 \Rightarrow N(A) = 4$

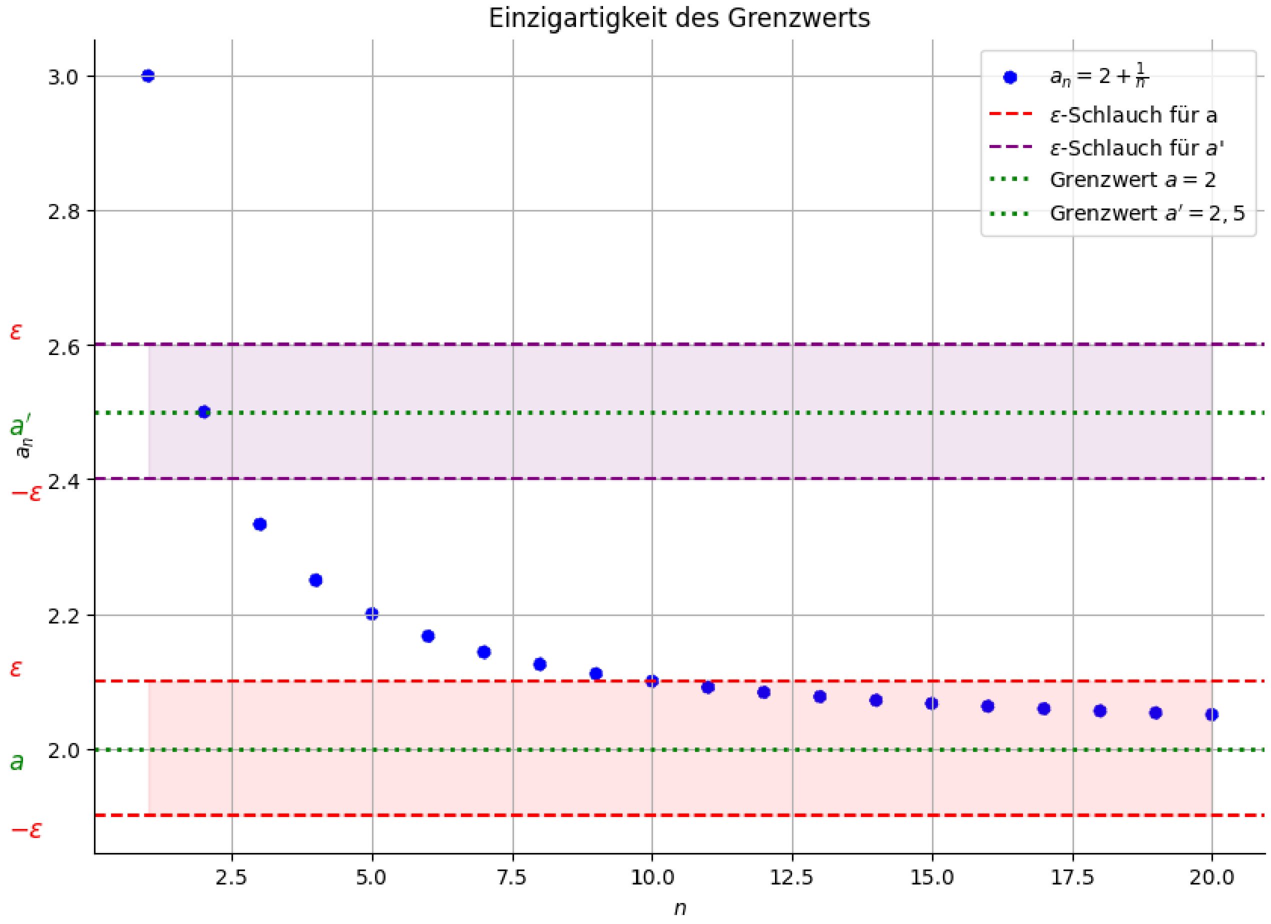
Ist $A = 5 \Rightarrow N(A) = 10$

Ist $A = 100 \Rightarrow N(A) = 200$



Satz 1: Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge

Eine konvergente Folge besitzt genau einen eindeutigen Grenzwert.



Satz 1: Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge (Forts.)

Beweis:

Sei (a_n) eine konvergente Folge, die gegen den Grenzwert a konvergiert.

D.h. nach Definition für Konvergenz: $\forall\, \mathcal{E} > 0\ \exists\, N_1(\mathcal{E}) > 0\ \forall\, n > N_1(\mathcal{E}) : |a_n - a| < \mathcal{E}$

Annahme: die Folge (a_n) konvergiert auch gegen den Grenzwert a'

D.h. nach Definition für Konvergenz: $\forall\, \mathcal{E} > 0\ \exists\, N_2(\mathcal{E}) > 0\ \forall\, n > N_2(\mathcal{E}) : |a_n - a'| < \mathcal{E}$

Für $n > N(\mathcal{E}) := \max(N_1\left(\frac{\mathcal{E}}{2}\right), N_2\left(\frac{\mathcal{E}}{2}\right))$ gilt:

$|a_n - a| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ und $|a_n - a'| < \frac{\mathcal{E}}{2}$

Satz 1: Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge (Forts.)

Beweis (Forts.): Untersuche den Abstand $|a - a'|$ zwischen a und a'

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'|$$

$$= |(a - a_n) + (a_n - a')|$$

$$\leq |a - a_n| + |a_n - a'| \quad \text{(lt. Dreiecksungleichung } |x + y| \leq |x| + |y| \text{)}$$

$$= |a_n - a| + |a_n - a'| \quad \text{(wegen } |x| = |-x| \; \forall x \text{)}$$

$$< \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E} \quad \text{(wegen } |a_n - a| < \frac{\mathcal{E}}{2} \text{ und } |a_n - a'| < \frac{\mathcal{E}}{2} \text{)}$$

für alle $n > N(\mathcal{E}) = \max(N_1(\mathcal{E}), N_2(\mathcal{E}))$

Da $\mathcal{E}$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt :

$$|a - a'| < \mathcal{E} \Rightarrow |a - a'| = 0 \Rightarrow a = a'$$

Satz 2: Rechenregeln für Grenzwerte

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$

Beispiel:

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$, dann: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 3 + 5 = 8$

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$

Beispiel:

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$, dann: $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 3 - 5 = -2$

Satz 2: Rechenregeln für Grenzwerte (Forts.)

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot\ b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

<u>Beispiel</u>:

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 5$, dann: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot\ b_n) = 3 \cdot 5 = 15$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \text{wenn } \ b_n \neq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ und\ b \neq 0$

<u>Beispiel</u>:

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$, dann: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{6}{2} = 3$

Satz 2: Rechenregeln für Grenzwerte (Forts.)

e) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

<u>Beispiel</u>:

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -4$, dann: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |-4| = 4$

f) Wenn $a_n \leq b_n$ für „fast alle" $n \in \mathbb{N}$, d. h. $\forall\, n$ ab einem $n_o \in \mathbb{N}$, dann gilt $a \leq b$

Satz 2: Rechenregeln für Grenzwerte (Forts.)

g) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda \cdot a$

<u>Beispiel</u>:

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ und $\lambda = 2$, dann: $\lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot a_n = 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \cdot 3 = 6$

Beispiel 5: Ermitteln der Konvergenz mit Rechenregeln für Grenzwerte

Betrachten wir die Folge $(a_n) = \left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}\right)$. Ist diese Folge konvergent?

Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\cdot\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(3+\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\cdot\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}$$

(Anwendung: Satz 2 d)

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}(2)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}(3)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

(Anwendung: Satz 2 a und b)

$$= \frac{2-0}{3+0-0} = \frac{2}{3}$$

Beispiel 5: Ermitteln der Konvergenz mit Rechenregeln für Grenzwerte

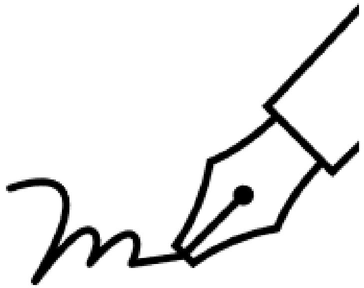
Sind die nachfolgenden Folgen (a_n) konvergent? Berechnen Sie den Grenzwert mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte.

a) $a_n = \frac{2n+1}{3n-4}$

b) $a_n = \frac{3n^3-4n^2+7n-1}{-5n^3+2n^2-8n}$

c) $a_n = \frac{3n^3-4n^2+7n-1}{-5n^4+2n^2-8n}$

d) $a_n = \frac{3n^4-4n^2+7n-1}{-5n^3+2n^2-8n}$



Satz 3: Konvergenz für Polynome

Für Polynome

$$P(n) = \sum_{k=0}^{r} p_k n^k = p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + \ldots + p_r n^r \text{ und } Q(n) = \sum_{k=0}^{s} q_k n^k$$

(mit $p_r \neq 0\ und\ q_s \neq 0)\ gilt$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} sign\frac{p_r}{q_s} \cdot \infty & für\ r > s \\ \frac{p_r}{q_s} & für\ r = s \\ 0 & für\ r < s \end{cases} \qquad \text{mit } sign(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Definition 5: Teilfolge

Seien (a_n) eine beliebige Folge und (m_n) mit $m_0 < m_1 < m_2 <\ldots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen.

Dann heißt die Folge (b_n) mit $b_n :=\ a_{m_n}$ Teilfolge von (a_n).

$$b_n \coloneqq \left(a_{m_n}\right) = (a_{m_0}, a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots)$$

Beispiel 6: Teilfolge

Wie kann ich aus einer Folge natürlicher Zahlen (a_n) eine Folge (b_n) machen, die nur gerade natürliche Zahlen beinhaltet?

Sei $(a_n) = (n)$.

Wähle eine Hilfsfolge $m_n = (2n) = (2, 4, 6, 8, \dots)$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich für:

$n = 1$: $m_1 = 2 \cdot 1 = 2$ $\quad$ $n = 3$: $m_3 = 2 \cdot 3 = 6$ $\quad$ $n = 5$: $m_5 = 2 \cdot 5 = 10$

$n = 2$: $m_2 = 2 \cdot 2 = 4$ $\quad$ $n = 4$: $m_4 = 2 \cdot 4 = 8$ $\quad$ $n = 6$: $m_6 = 2 \cdot 6 = 12$

…

Daraus ergibt sich laut Definition die Teilfolge:

$$(b_n) = (a_{2n}) = (a_2, a_4, a_6, a_8, \dots)$$

Satz 4: Konvergenzkriterien für Folgen

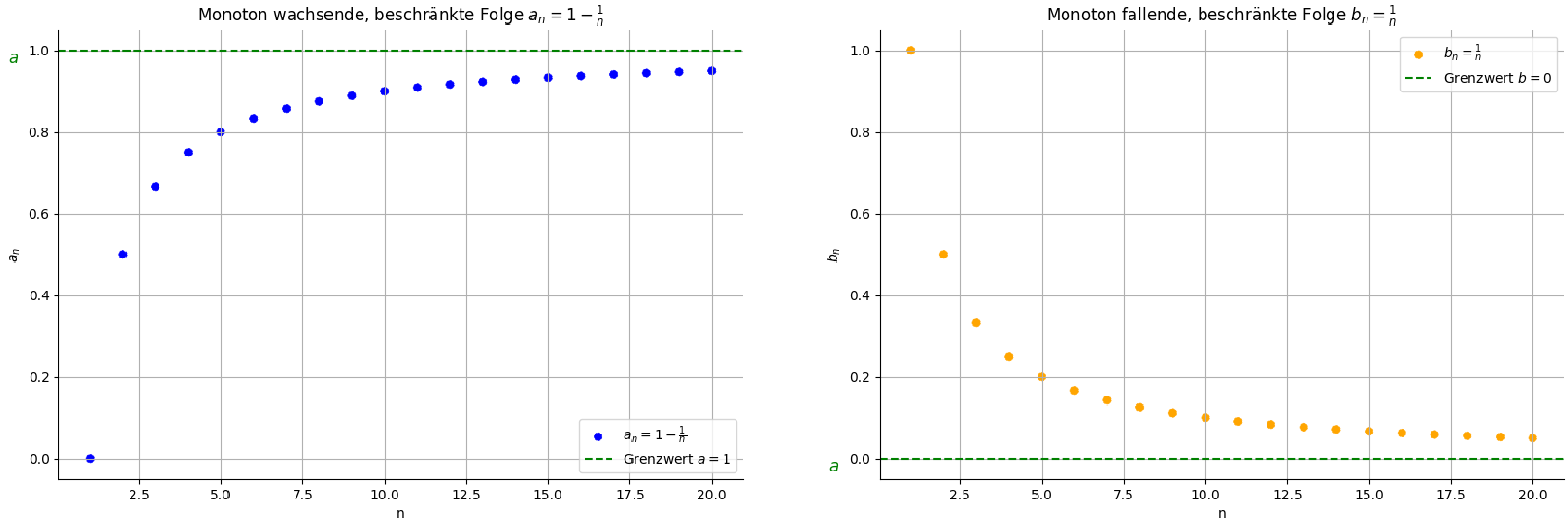
a) Wenn eine Folge konvergent ist, dann ist sie beschränkt.

b) Wenn eine Folge eigentlich oder uneigentlich konvergent ist, konvergiert jede Teilfolge (eigentlich oder uneigentlich) gegen den gleichen Grenzwert wie die Folge selbst.

Satz 5: Konvergenz von beschränkten Folgen

a) Wenn eine **monoton wachsende** Folge nach **oben beschränkt** ist, dann ist sie konvergent.

b) Wenn eine **monoton fallende** Folge nach **unten beschränkt** ist, dann ist sie konvergent.



Definition 6: Rekursive Folge

Eine Folge (a_n) heißt rekursiv , wenn ihr n-tes Gleid a_n in Abhängigkeit von den vorherigen Gliedern $a_1, a_2, \dots$ definiert wird.

Beispiel: Fibonacci-Folge:

$$a_n := \begin{cases} 1, & für\; n \leq 2, \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & sonst \end{cases}$$

$a_1 \;=\; 1$

$a_2 \;=\; 1$

$a_3 \;=\; a_{3-1} \;+\; a_{3-2} \;=\; a_2 \;+\; a_1 \;=\; 1 \;+ 1 \;=\; 2$

Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \; für \; n \in \mathbb{N}$.

Ermitteln Sie, falls existent, den Grenzwert der Folge.

1. Schritt: Annahme: die Folge konvergiert gegen a
2. Schritt: Beweise unter der Annahme von Schritt 1 die Beschränktheit der Folge
3. Schritt: Beweise unter Verwendung von Schritt 2 die Monotonie der Folge
4. Schritt: Beweise unter Anwendung von Satz 5, dass ein Grenzwert existiert
5. Schritt: Berechne den Grenzwert der Folge, falls Schritt 4 erfüllt ist.

Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

$a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$ $für$ $n \in \mathbb{N}$.

Vorüberlegung: Wie sehen die ersten Glieder der Folge aus?

$$n = 1\colon a_{1+1} = a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$n = 2\colon a_{2+1} = a_3 = \frac{a_2}{2} + 1 = \frac{\frac{3}{2}}{2} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

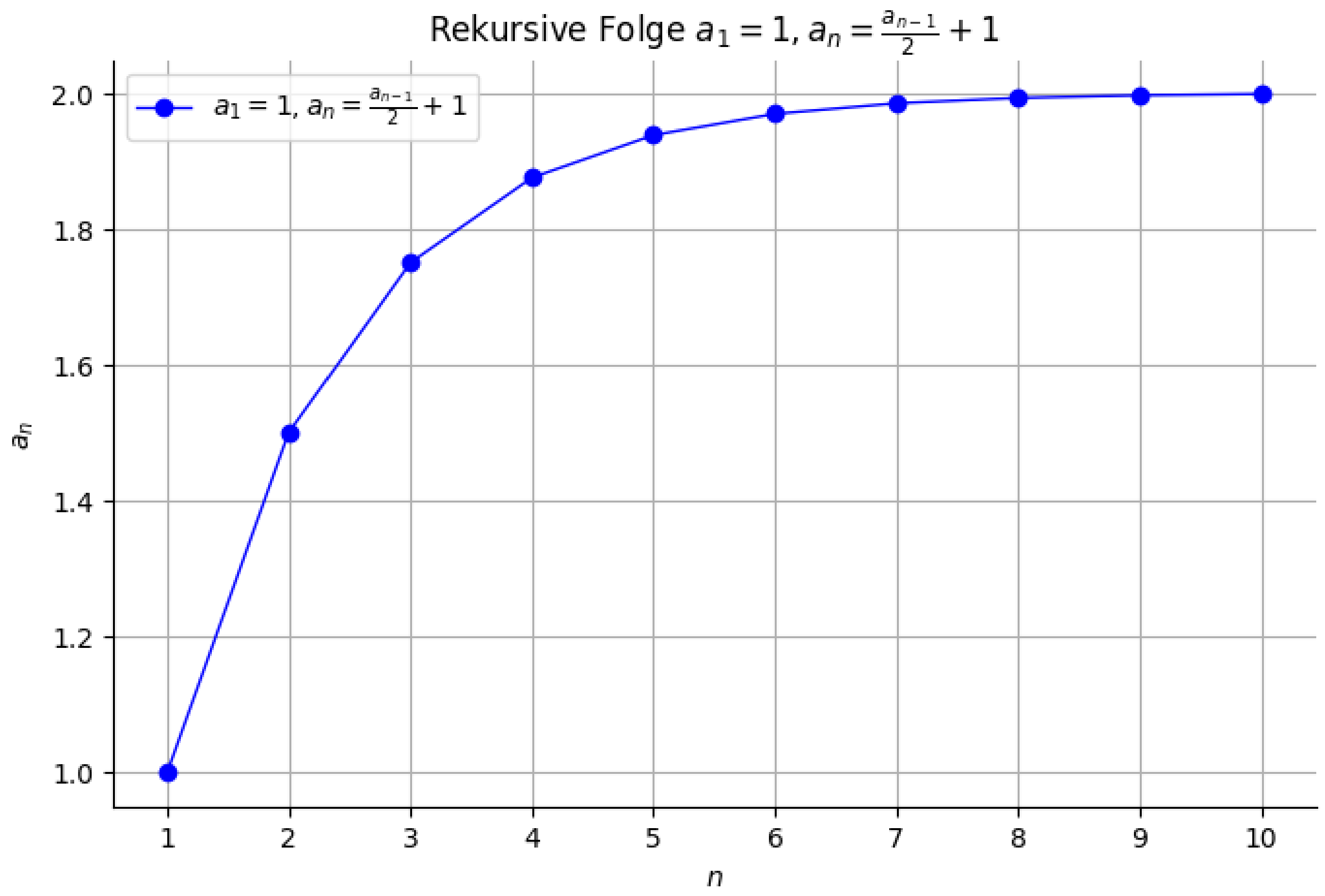
$$n = 3\colon a_{3+1} = a_4 = \frac{a_3}{2} + 1 = \frac{\frac{7}{4}}{2} + 1 = \left(\frac{7}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{8} + 1 = \frac{15}{8}$$

$$n = 4\colon a_{4+1} = a_5 = \frac{a_4}{2} + 1 = \frac{\frac{15}{8}}{2} + 1 = \left(\frac{15}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{15}{16} + 1 = \frac{31}{16}$$

$\Rightarrow$ Behauptung: Folge ist streng monoton wachsend

Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

$a_1 \; = \; 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \; für \; n \in \mathbb{N}.$



Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

$a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \; für \; n \in \mathbb{N}$.

1. Schritt: Annahme: Die Folge konvergiert gegen a

<u>Annahme</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$

$$\Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2} + 1\right) = \frac{a}{2} + 1$$

Einsetzen und auflösen:

$$a = \frac{a}{2} + 1 \mid \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2\,a = a + 2 \mid -a$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Wenn die Folge konvergiert, dann gegen den Grenzwert a = 2.

Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

2. Schritt: Beweise unter Verwendung von Schritt 1 die Beschränktheit der Folge

Behauptung 1: Folge ist beschränkt durch 2, d.h. $a_n \leq 2 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$

Beweis: Durch vollständige Induktion

Induktionsanfang für n = 1:

$$a_1 = 1 \leq 2$$

Induktionsvoraussetzung: $a_n \leq 2$

Induktionsbehauptung: $a_{n+1} \leq 2$

Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

2. Schritt: Beweise unter der Annahme von Schritt 1 die Beschränktheit der Folge

Induktionsschritt $n \; {-}{>} \; n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$$

$$\leq \frac{2}{2} + 1 \qquad \text{da } a_n \leq 2 \text{ nach Induktionsvoraussetzung}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

$\Rightarrow$ Die Folge (a_n) ist nach oben beschränkt durch 2.

Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

3. Schritt: Beweise unter der Annahme von Schritt 2 die Monotonie der Folge

Behauptung 2: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend

d.h. zeige, dass $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n}{2} + 1 - a_n \\
&= 1 - \frac{a_n}{2} \\
&= \frac{2}{2} - \frac{a_n}{2} \\
&= \frac{2-a_n}{2} \\
&\geq \frac{2-2}{2} = 0 \qquad \text{da } a_n \leq 2 \text{ gemäß Schritt 2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Die Folge (a_n) ist monoton wachsend.

Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

4. Schritt: Beweise unter Anwendung von Satz 5, dass ein Grenzwert existiert

Nach Schritt 2 ist die Folge (a_n) nach oben beschränkt durch 2.
Nach Schritt 3 ist die Folge (a_n) monoton wachsend.
Also gilt nach Satz 5 a), dass die Folge (a_n) konvergent ist und somit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ existiert.

Beispiel 7: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

5. Schritt: Berechne den Grenzwert der Folge, falls Schritt 4 erfüllt ist.

Laut Schritt 4 existiert ein Grenzwert a.

Berechne den Grenzwert mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte (vgl. Schritt 1)

Nach Schritt 4 gilt: $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + 1\right) = \frac{a}{2} + 1$

Einsetzen und auflösen:

$$a = \frac{a}{2} + 1 \mid \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2\,a = a + 2 \mid -a$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

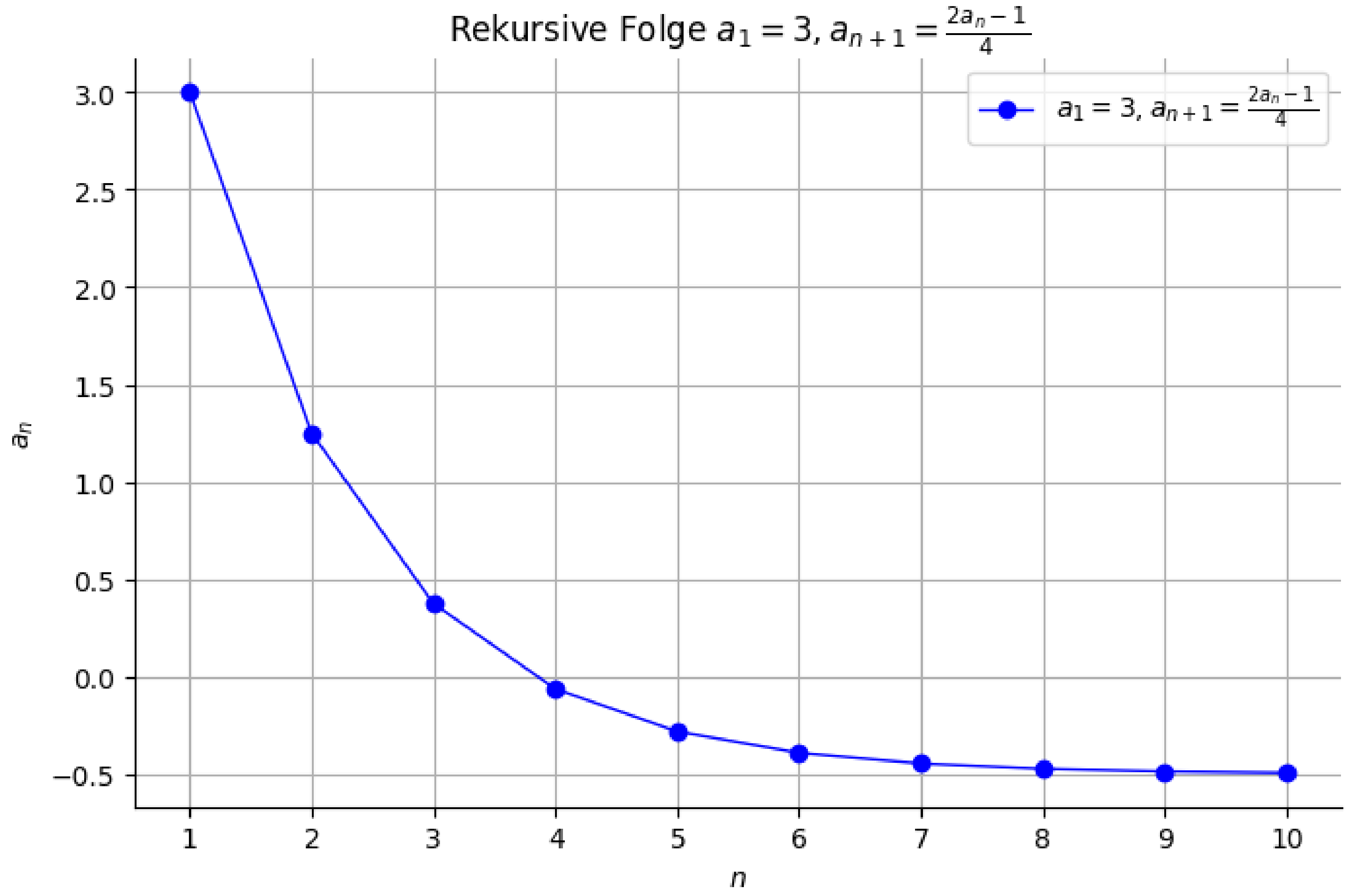
Beispiel 8: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{4}$ $f$ür $n \in \mathbb{N}$.

Ermitteln Sie, falls existent, den Grenzwert der Folge.

Beispiel 8: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

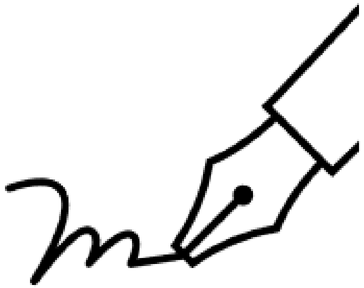
Graphische Darstellung der Folge:



Beispiel 9: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge

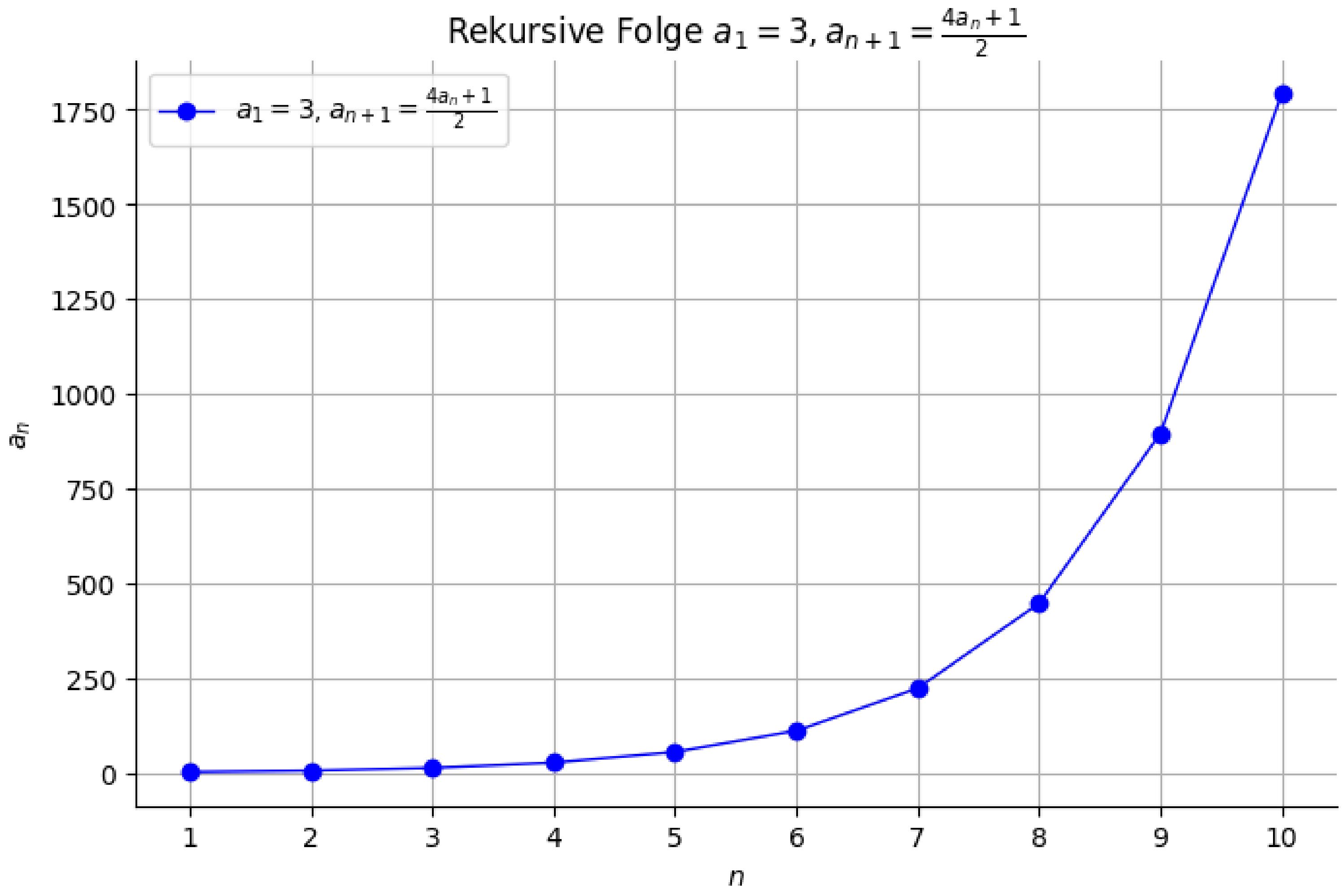
Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{4a_n+1}{2}$ $für\ n \in \mathbb{N}$.

Ermitteln Sie, falls existent, den Grenzwert der Folge.



Beispiel 9: Beweis der Konvergenz einer rekursiven Folge (Forts.)

Graphische Darstellung der Folge:



Definition 7: Intervallschachtelung (IS)

Sei (I_n) eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $\text{mit } I_n = [a_n, b_n]$. Wir nennen (I_n) eine <u>Intervallschachtelung</u>, wenn gilt:

- $I_{n+1} \subseteq I_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Beispiel 10: Intervallschachtelung (IS)

Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Folge mit

$$a_n = \left(0.5 - \frac{1}{n}\right) \; und \; b_n = \left(0.5 + \frac{1}{n}\right)$$

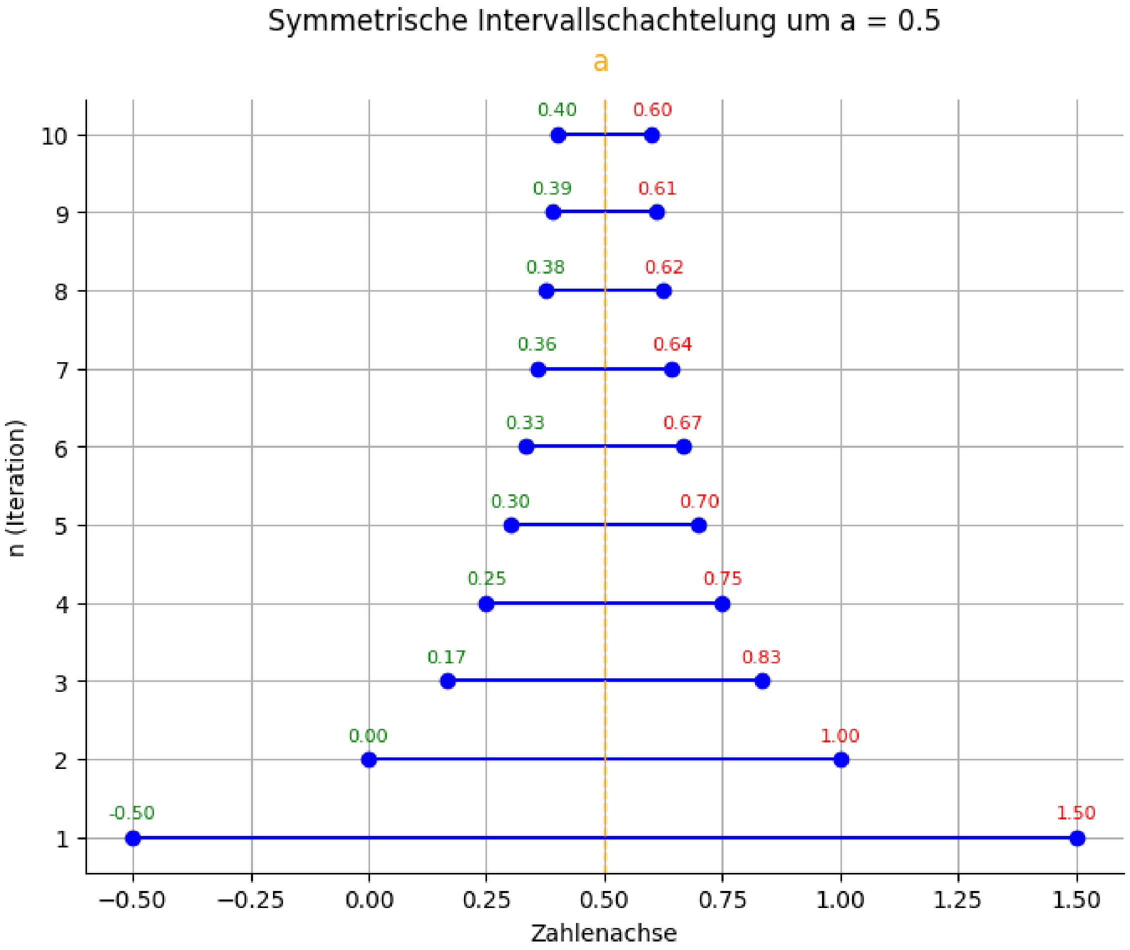
Dann ist:

$$I_n = [a_n, b_n] = \left[\left(0.5 - \frac{1}{n}\right), \left(0.5 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$I_1 := \left[\left(0.5 - \frac{1}{1}\right), \left(0.5 + \frac{1}{1}\right)\right] = [-0.5\,, 1.5]$$

$$I_2 := \left[\left(0.5 - \frac{1}{2}\right), \left(0.5 + \frac{1}{2}\right)\right] = [0, 1]$$

$$I_3 := \left[\left(0.5 - \frac{1}{3}\right), \left(0.5 + \frac{1}{3}\right)\right] = [0.16 \ldots\,, 0.83 \ldots]$$



Satz 6: Eigenschaften einer Intervallschachtelung

Für eine Intervallschachtelung (I_n) mit $I_n = [a_n, b_n]$ gilt:

a) Die Folge (a_n) der Untergrenzen ist monoton wachsend und nach oben (durch b_1) beschränkt und somit nach Satz 5 (Konvergenz beschränkter Folgen) konvergent.

b) Die Folge (b_n) der Obergrenzen ist monoton fallend und nach unten (durch a_1) beschränkt und somit nach Satz 5 (Konvergenz beschränkter Folgen) konvergent.

c) Die Folgen (a_n) und (b_n) besitzen den gleichen Grenzwert c, für den gilt: $c \in I_n \ für \ alle \ n \in \mathbb{N}$.

d) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $\mathrm{N}(\varepsilon) > 0$, sodass gilt: $I_n \subseteq (c - \varepsilon,\ c + \varepsilon) \ für \ alle \ n > N(\varepsilon)$.

e) Es gibt keinen anderen Punkt c‘ ≠ c mit den Eigenschaften c) und d). Deshalb wird der Punkt c durch die Intervallschachtelung eindeutig definiert.

Beispiel 11: Wurzelberechnung durch Intervallhalbierung (Bisektionsverfahren)

- Das Bisektionsverfahren ist ein Verfahren der Mathematik und Informatik, das zur näherungsweisen Berechnung von Werten verwendet werden kann.
- Es wird auch Intervallhalbierungsverfahren genannt.

- Funktionsweise:
  - 1. Schritt: Teile ein Anfangsintervall in zwei Hälften.
  - 2. Schritt: Wähle dasjenige Teilintervall aus, in dem der gesuchte Wert liegen muss.
  - 3. Schritt: Wiederhole Schritt 1 und Schritt 2 für dieses Teilintervall, bis das Intervall ausreichend klein ist.

Beispiel 11: Wurzelberechnung durch Intervallhalbierung (Bisektionsverfahren) (Forts.)

Sei $x > 0$ fest vorgegeben.

Definiere eine Intervallschachtelung mit $I_1 = [a_1, b_1] = [0, x + 1]$

und für $n \in \mathbb{N}$:

- $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

- $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, c_n] & falls\ x \leq c_n^2 \ \ (d.h\ \sqrt{x} \leq c_n) \quad (1) \\ [c_n, b_n] & sonst\ (d.h. \sqrt{x} > c_n) \quad\quad (2) \end{cases}$

Aufgrund der Definition gilt $\sqrt{x} \in I_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 11: Wurzelberechnung durch Intervallhalbierung (Bisektionsverfahren) (Forts.)

Berechnen Sie konkret $\sqrt{2}$ mit Hilfe des Bisektionsverfahrens

Das Startintervall sei $I_1 = [a_1, b_1] = [0, 3]$

1. Iteration: $I_1 = [a_1, b_1] = [0, 3]$
   $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{1}{2}(0 + 3) = 1.5$
   $\Rightarrow c_1^2 = (1.5)^2 = 2.25 > 2 = x$, wegen $x \leq c_n^2$ ist $\sqrt{2} \in [0\,, 1.5]$ (c_1 ist neue obere Schranke)

2. Iteration: $I_2 = [a_2, b_2] = [a_1, c_1] = [0, 1.5]$
   $c_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{1}{2}(0 + 1.5) = 0.75$
   $\Rightarrow c_2^2 = (0.75)^2 = 0.5625 < 2 = x$, wegen $x > c_n^2$ ist $\sqrt{2} \in [0.75\,, 1.5]$ (c_2 ist neue untere Schranke)

Beispiel 11: Wurzelberechnung durch Intervallhalbierung (Bisektionsverfahren) (Forts.)

3. Iteration: $I_3 = [a_3, b_3] = [c_2, b_2] = [0.75, 1.5]$

   $c_3 = \frac{1}{2}(a_3 + b_3) = \frac{1}{2}(0.75 + 1.5) = 1.125$

   $\Rightarrow c_3^2 = (1.125)^2 = 1.265625 < 2 = x$, wegen $x > c_n^2$ ist $\sqrt{2} \in [1.125\,, 1.5]$ (c_3 ist neue untere Schranke)

- ….

10. Iteration: $I_{10} = [a_{10}, b_{10}] = [c_9, b_{10}] =$ [1.412109375, 1.41796875]

    $c_{10} = \frac{1}{2}(a_{10} + b_{10}) = \frac{1}{2}(1.412109375 + 1.41796875) = 1.4150390625$

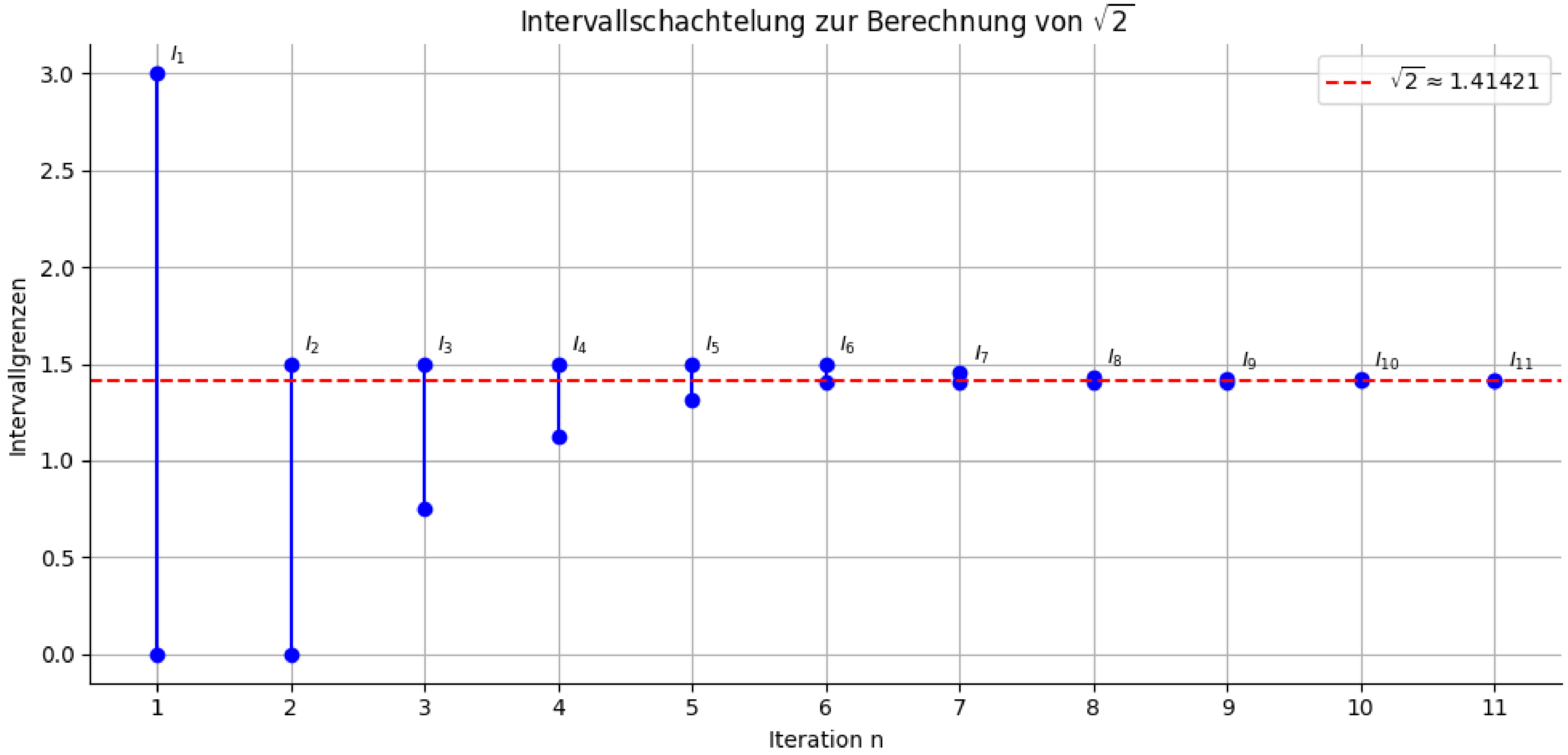
    $\Rightarrow c_{10}^2 = (1.4150390625\,)^2 = 2.00225 > 2 = x$,

    wegen $x \leq c_n^2$ ist $\sqrt{2} \in$ [1.412109375,1.4150390625] (c_{10} ist neue obere Schranke)

Ergebnis nach 10 Iterationen:

$\sqrt{2} \in$ [1.412109375,1.4150390625] $\Rightarrow \sqrt{2} \approx 1.41$

Beispiel 11: Wurzelberechnung durch Intervallhalbierung (Bisektionsverfahren) (Forts.)

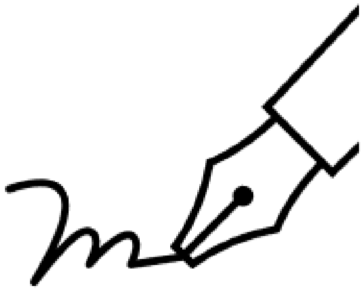


Beispiel 12: Wurzelberechnung mit dem Heron-Verfahren

Sei $x > 0$ fest vorgegeben.

Definiere $a_1 = x + 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.

- Funktionsweise:
  - 1. Schritt: Starte mit der Anfangsannäherung a_1.
  - 2. Schritt: Berechne mit a_{n+1} die nächste Annäherung.
  - 3. Schritt: Wiederhole Schritt 2, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.



Beispiel 12: Wurzelberechnung mit dem Heron-Verfahren (Forts.)

Berechnen Sie konkret $\sqrt{2}$ mit Hilfe des Heron-Verfahrens.

1. Iteration: Anfangsannäherung

   $a_1 = x + 1 = 2 + 1 = 3$

2. Iteration:

   $$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{2}{3}\right) = 1.8333333333333333$$

3. Iteration:

   $$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(1.8333333333333333 + \frac{2}{1.8333333333333333}\right) = 1.4621212121212122$$

4. Iteration:

   $$a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{2}{a_3}\right) = 1.414998429894803$$

5. Iteration:

   $$a_5 = \frac{1}{2}\left(a_4 + \frac{2}{a_4}\right) = 1.4142137800471977$$

Beispiel 12: Wurzelberechnung mit dem Heron-Verfahren (Forts.)

10. Iteration:

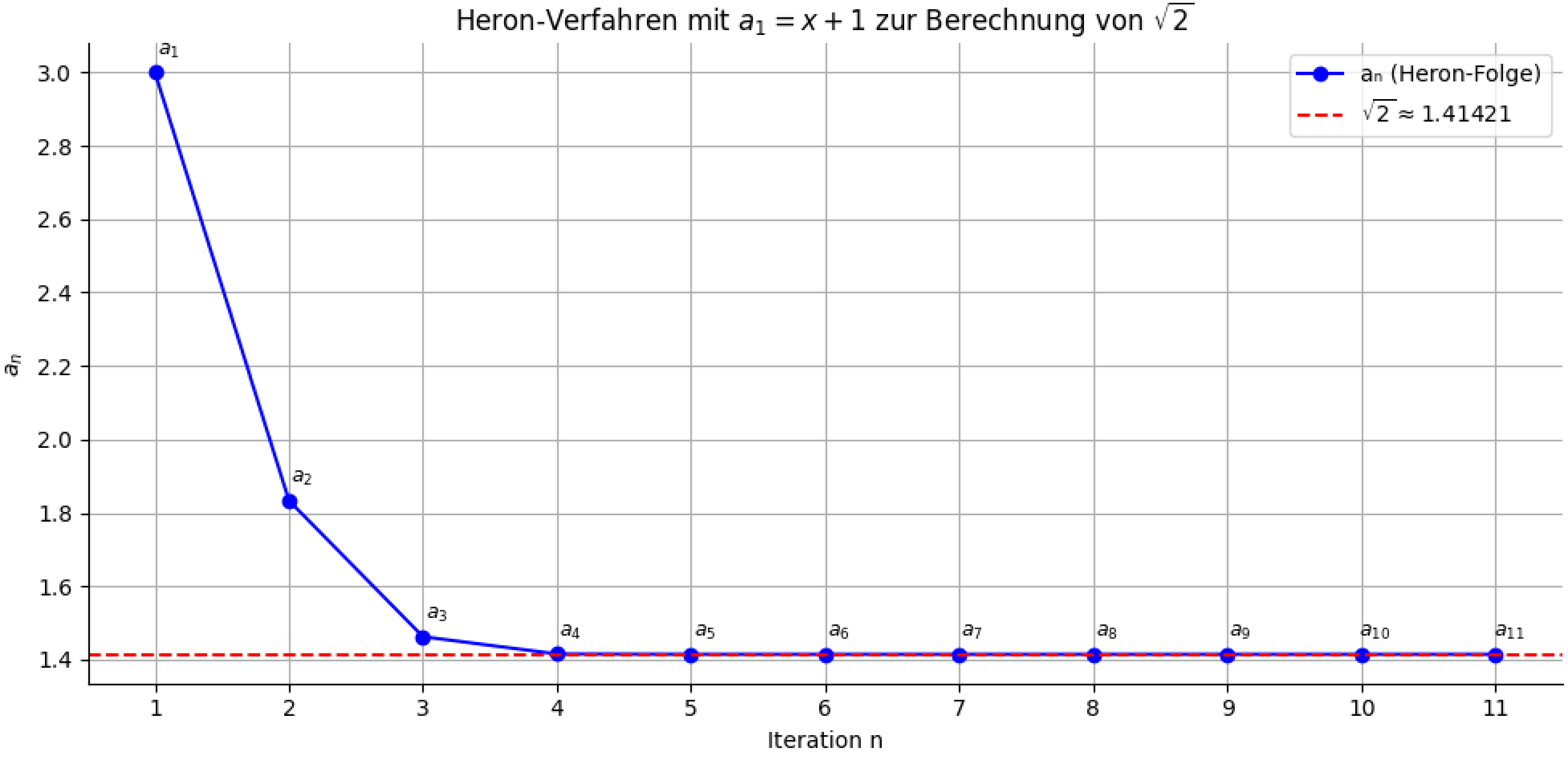
$$a_{10} = \frac{1}{2}\left(a_9 + \frac{2}{a_9}\right) = 1.414213562373095$$

Ergebnis nach 10 Iterationen:

$$\Rightarrow \sqrt{2} \approx 1.414213562373095$$

Genauigkeit von bis zu 15 Stellen!

Beispiel 12: Wurzelberechnung mit dem Heron-Verfahren (Forts.)



Beispiel 13: Bisektionsverfahren vs. Heron-Verfahren

Was konvergiert schneller gegen den Wert von $\sqrt{2}$ = 1.4142135623730950488016887242097?

Iteration n	Bisektionsverfahren	Heron-Verfahren
1	[0.0000000000, 3.0000000000]	3
2	[0.0000000000, 1.5000000000]	1.8333333333333333
3	[0.7500000000, 1.5000000000]	1.4621212121212122
4	[1.1250000000, 1.5000000000]	1.4149984298948031
5	[1.3125000000, 1.5000000000]	1.4142137800471977
6	[1.4062500000, 1.5000000000]	1.4142135623731118
7	[1.4062500000, 1.4531250000]	1.414213562373095
8	[1.4062500000, 1.4296875000]	1.414213562373095
9	[1.4062500000, 1.4179687500]	1.414213562373095
10	[1.4121093750, 1.4179687500]	1.414213562373095
11	[1.4121093750, 1.4150390625]	1.414213562373095

Lemma 1: Ungleichung von Bernoulli

Für $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ gilt: $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Daraus folgt:

Für $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x^n \geq 1 + n(x-1)$$

Lemma 2: Binomialtheorem

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$
$$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$

….

Lemma 2: Binomialtheorem (Forts.)

	Exponent	Anzahl Terme
$(a+b)^0 = 1$	0	0 + 1 = 1
$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$	1	1 + 1 = 2
$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$	2	2 + 1 = 3
$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$	3	3 + 1 = 4
	n	n + 1

Summe Exponent:	$a^{3} \overset{+}{} b^{0}$	$+\ 3a^{2} \overset{+}{} b^{1}$	$+\ 3a^{1} \overset{+}{} b^{2}$	$+\ 1a^{0} \overset{+}{} b^{3}$
Exponent a:	3	2	1	0
Exponent b:	0	1	2	3

Lemma 2: Binomialtheorem (Forts.)

Binomialkoeffizienten sind symmetrisch: Das Pascalsche Dreieck

n = 0						1					
n = 1					1		1				
n = 2				1	+	2		1			
n = 3			1		3		3		1		
n = 4		1		4		6		4		1	
n = 5	1		5		10		10		5		1

$$(a+b)^3 = \mathbf{1}a^3b^0 + \mathbf{3}a^2b^1 + \mathbf{3}a^1b^2 + \mathbf{1}a^0b^3$$

Lemma 2: Binomialtheorem (Forts).

Somit gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \; für\; k = 1, \ldots n$

und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (Binomialkoeffienzienten, vgl. Pascalsches Dreieck)

Beispiel 14: Binomialtheorem

Berechnen Sie die erste binomische Formel mit n = 2 mit dem Binomialtheorem.

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k$$

$$= \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$$

$$= 1\, a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + 1\, a^0 b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Lemma 3: Fakultät

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{k-1}$$

Lemma 4: Geometrische Summe

Für alle $n \epsilon \mathbb{N}_0 \ und \ q \ \neq 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Lemma 5: Rechenregeln für Potenzen

Für $n, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

a) Nullpotenz:
$a^0 = 1$

Beispiel: $2^0 = 1$

b) Negativer Exponent: mit $a \neq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Beispiel: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) Multiplikation:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Beispiel: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

d) Division: mit $a \neq 0$
$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$

Beispiel: $\frac{5^6}{5^2} = 5^6 \cdot 5^{-2} = 5^{6-2} = 5^4$

Lemma 5: Potenzrechenregeln (Forts.)

Für $n, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

e) Potenz

$(a \cdot b)^n = a^n b^n$

Beispiel: $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$

f) Quotient mit $b \neq 0$:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a^n}{b^n}\right) = a^n b^{-n}$

Beispiel: $\left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$

Beispiel 16: Zinseszinsformel und die Eulersche Zahl e

Gegeben sei ein Anfangskapitel $K\ > 0$ (z.B. K = 1000) und ein jährlicher Zinssatz $p > 0$ (z.B. p = 0,05).

- Bei Jährlicher Verzinsung beträgt das Kapital nach:

1. Jahr: $K_1 = K + \ K \cdot \ p \ = \ K(1 + p)^1$

$K_1 = 1000(1 + 0{,}05)^1 \ = 1050€$

2. Jahr: $K_2 = K(1 + p)^2$

$K_2 = 1000(1 + 0{,}05)^2 \ = 1102{,}50€$

n Jahren:

$$K_n = \ K(1 + p)^n \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 16: Zinseszinsformel und die Eulersche Zahl e (Forts.)

- Bei monatlicher Verzinsung beträgt das Kapital nach:

1. Monat: $K_1 = K + K \cdot \frac{p}{12} = K\left(1 + \frac{p}{12}\right)^1$

$$K_1 = 1000\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^1 = 1004{,}17$$

2. Monat: $K_2 = K\left(1 + \frac{p}{12}\right)^2$

$$K_2 = 1000\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^2 = 1008{,}35€$$

n Monaten:

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 16: Zinseszinsformel und die Eulersche Zahl e (Forts.)

- Bei täglicher Verzinsung beträgt das Kapital nach:

1. Tag: $K_1 = K + K \cdot \frac{p}{365} = K\left(1 + \frac{p}{365}\right)^1$

$$K_1 = 1000\left(1 + \frac{0{,}05}{365}\right)^1 = 1000{,}14$$

2. Tag: $K_2 = K\left(1 + \frac{p}{365}\right)^2$

$$K_2 = 1000\left(1 + \frac{0{,}05}{365}\right)^2 = 1000{,}27$$

n Tagen:

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 16: Zinseszinsformel und die Eulersche Zahl e (Forts.)

- Bei kontinuierlicher Verzinsung beträgt das Kapital nach einem Jahr:

$$e = \lim_{n\to\infty} K\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = K\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$

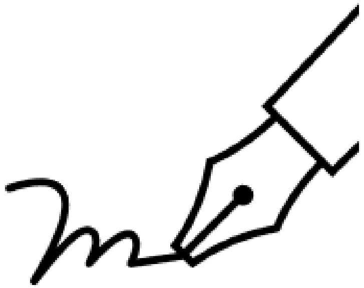
Speziell für K = 1 und p = 1:

$$e = \lim_{n\to\infty} 1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

sofern diese Grenzwerte existieren.

$\Rightarrow$ Mit Hilfe von Satz 5 (Konvergenz beschränkter Folgen) wollen wir nun beweisen, dass die Folge (a_n) konvergiert.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$



Kontrollaufgabe 1:

Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

b) Eine Folge kann gleichzeitig arithmetisch und geometrisch sein.

Kontrollaufgabe 2:

Welche Eigenschaften besitzen die Folgen:

a) $a_n = 2n + 3$

b) $a_n = 3^n$

c) $a_n = (-1)^n$

d) $a_n = n^2$

Kontrollaufgabe 3:

Untersuchen Sie die nachfolgende Folge auf Konvergenz.

$$a_n := \left(\frac{2n^2 - 3}{3n^2 + 2n - 1} \right)$$

a) Ermitteln Sie den möglichen Grenzwert mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte.

b) Beweisen Sie den in a) ermittelten Grenzwert mittels Grenzwertbeweis.

Kontrollaufgabe 4:

Berechnen Sie die Grenzwerte der nachfolgenden Folgen.

a) $a_n = \frac{14}{n}$

b) $b_n = \frac{n}{n+1}$

c) $c_n = \frac{6n^4+3n^2+2}{7n^4+12n^3+n}$

Kontrollaufgabe 1: Musterlösung

a) Falsch:
Eine beschränkte Folge muss nicht konvergent sein. Gegenbeispiel $a_n = (-1)^n$, diese ist beschränkt, aber nicht konvergent.

b) Richtig: Eine konstante Folge ist sowohl arithmetisch (mit d = 0) als auch geometrisch (mit q = 1).

Kontrollaufgabe 2: Musterlösung

Welche Eigenschaften besitzen die Folgen? Begründen Sie Ihre Aussagen:

a) $a_n = 2n + 3$

- Arithmetisch: Ja, die Folge ist arithmetisch, weil der Unterschied zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Der Unterschied ist d=2.
- Monotonie: Streng monoton wachsend, weil der Unterschied zwischen den Gliedern immer positiv ist.
- Beschränkt: Nein, die Folge ist unbeschränkt, da die Werte mit zunehmendem n immer größer werden.
- Geometrisch: Nein, da die Folge nicht die Form $a_{n+1} = q \cdot a_n$ hat.
- Alternierend: Nein, da die Folge nicht zwischen positiven und negativen Werten wechselt.

Kontrollaufgabe 2: Musterlösung

b) $a_n = 3^n$

Arithmetisch: Nein, diese Folge ist nicht arithmetisch, da der Unterschied zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern nicht konstant ist.

- Monotonie: Streng monoton wachsend, weil jeder nachfolgende Wert der Folge größer ist als der vorherige.
- Beschränkt:
  - Die Folge $a_n = 3^n$ ist nach **unten beschränkt** (der kleinste Wert ist 3 für n = 1).
  - Sie ist **unbeschränkt nach oben** (da die Werte mit wachsendem n unendlich groß werden).
- Geometrisch: Ja, diese Folge ist geometrisch, da sie die Form $a_{n+1} = q \cdot a_n$ hat, mit q = 3.
- Alternierend: Nein, da die Folge immer positive Werte hat.

Kontrollaufgabe 2: Musterlösung

c) $a_n = (-1)^n$

- Arithmetisch: Nein, diese Folge ist nicht arithmetisch, da die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern nicht konstant ist.
- Monotonie: Nicht monoton steigend oder monoton fallend, da die Folge abwechselnd positive und negative Werte hat und somit alternierend ist.
- Beschränkt: Ja, die Folge ist nach oben und unten beschränkt, da die Werte immer zwischen 1 und -1 liegen.
- Geometrisch: Ja mit q = -1.
- Alternierend: Ja, die Folge ist alternierend, da ihre Glieder immer zwischen 1 und -1 wechseln.

Kontrollaufgabe 2: Musterlösung

d) $a_n = n^2$

- Arithmetisch: Nein, diese Folge ist nicht arithmetisch, da der Unterschied zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern nicht konstant ist.
- Monotonie: Diese Folge ist streng monoton wachsend.
- Beschränkt: Nein, die Folge ist nach oben unbeschränkt.
- Geometrisch: Nein, diese Folge ist nicht geometrisch, da der Quotient der aufeinander folgenden Glieder nicht konstant ist.
- Alternierend: Nein, die Folge ist nicht alternierend, da sie immer positive Werte hat.

Kontrollaufgabe 2: Musterlösung

Zusammenfassend:

Folge	Arithmetisch	Geometrisch	Streng monoton wachsend	Streng monoton fallend	Alternierend	Nach oben beschränkt	Nach unten beschränkt
$a_n = 2n + 3$	Ja	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Ja
$a_n = 3^n$	Nein	Ja	Ja	Nein	Nein	Nein	Ja
$a_n = (-1)^n$	Nein	Ja	Nein	Nein	Ja	Ja	Ja
$a_n = n^2$	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Ja

Kontrollaufgabe 3: Musterlösung

a) $a_n := \left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2-0}{3+0-0} = \frac{2}{3}$$

Kontrollaufgabe 3: Musterlösung

b) Grenzwertbeweis

$$a_n := \left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}\right), a = \frac{2}{3}\ (aus\ a))$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Vorüberlegung zur Wahl von $N(\mathcal{E})$:

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3(2n^2-3)}{3(3n^2+2n-1)} - \frac{2(3n^2+2n-1)}{3(3n^2+2n-1)}\right| = \left|\frac{3(2n^2-3)-2(3n^2+2n-1)}{3(3n^2+2n-1)}\right|$$

$$= \left|\frac{(6n^2-9)-(6n^2+4n-2)}{3(3n^2+2n-1)}\right| = \left|\frac{6n^2-9-6n^2-4n+2}{3(3n^2+2n-1)}\right| = \left|\frac{-4n-7}{3(3n^2+2n-1)}\right|$$

$$= \left|\frac{(-1)(4n+7)}{3(3n^2+2n-1)}\right| = \frac{4n+7}{3(3n^2+2n-1)} = \frac{4n+7}{9n^2+6n-3} \underbrace{\leq}_{\substack{n\geq 7\\(1)}} \frac{5n}{9n^2} \underbrace{=}_{n\geq 0} \frac{5}{9n} < \varepsilon$$

$$(1)\ da, 4n+7 < 5n\ für\ n \geq 7$$

Kontrollaufgabe 3: Musterlösung

$\frac{5}{9n} < \varepsilon\ f\ddot{u}r\ n \geq 7\ nach\ \varepsilon$ auflösen:

$$\frac{5}{9n} < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow 5 < \varepsilon \cdot 9n$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{9\varepsilon} < n$$

Wähle daher $N(\mathcal{E}) = \max(7, \frac{5}{9\varepsilon})$.

Dann gilt für alle $\mathrm{n} > N(\mathcal{E})$ aufgrund der Vorüberlegung $|\mathrm{a_n} - \mathrm{a}| < \mathcal{E}$.

Kontrollaufgabe 4: Musterlösung

Berechnen Sie die Grenzwerte der nachfolgenden Folgen.

a) $a_n = \frac{14}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{14}{n} = 14 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 14 \cdot 0 = 0$

b) $b_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

c) $c_n = \frac{6n^4+3n^2+2}{7n^4+12n^3+n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^4+3n^2+2}{7n^4+12n^3+n} = \frac{6}{7}$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit