Vorlesung Analysis

Kapitel 1: Grundlagen

Inhalt

1. Grundvokabular:
   - Definition 1: Definition, Satz, Beweis, Lemma, Korollar, Axiom
   - Definition 2: Wichtige Symbole (Notationen)
   - Definition 3: Quantoren (Allquantor, Existenzquantor)
   - Definition 4: Implikation, Äquivalenz
2. Mengen, Zahlen, Funktionen
   - Definition 5: Menge
   - Definition 6: Natürliche Zahlen
   - Definition 7: Ganze Zahlen, Rationale Zahlen
   - Definition 8: Reelle Zahlen
   - Definition 9: Funktion, Definitionsmenge, Wertemenge

Inhalt

3. Beweistechniken
   - Definition 10: Direkter Beweis
   - Definition 11: Indirekter Beweis
   - Satz 1: Vollständige Induktion
   - Satz 2: Gaußsche Summenformel

- Kontrollaufgaben

Definition 1: Definition, Satz, Beweis, Lemma, Korollar, Axiom

a) Eine Definition führt einen neuen Begriff oder eine neue Schreibweise ein.
Sie erklärt ihre Bedeutung unter Verwendung bereits bekannter Begriffe und Schreibweisen.
Neue Begriffe werden durch Unterstreichung hervorgehoben.

b) Ein Satz formuliert eine wahre (bewiesene) Aussage, z. B. als Wenn-dann-Formulierung.
Er besteht aus einer Voraussetzung („Wenn“) und einer Behauptung („Dann“).
Beispiel:

Wenn $\underbrace{\text{eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist,}}_{\text{Voraussetzung}}$ **dann** $\underbrace{\text{ist sie auch durch 6 teilbar.}}_{\text{Behauptung}}$

Definition 1: Definition, Satz, Beweis, Lemma, Korollar, Axiom

c) Ein <u>Beweis</u> zeigt die Richtigkeit eines Satzes.
Hierbei werden meist bereits bewiesene Sätze oder Definitionen verwendet.

d) Ein <u>Lemma</u> ist ein Hilfssatz, der beim Beweis eines größeren Satzes hilft.

e) Ein <u>Korollar</u> ist eine direkte Folgerung aus einem vorherigen Satz.

f) Ein <u>Axiom</u> ist eine Grundannahme, die als wahr angenommen wird, ohne sie beweisen zu müssen. Axiome werden genutzt, um logische Schlussfolgerungen darzustellen.

Definition 2: Wichtige Symbole (Notationen)

In mathematischen Texten und Beweisen werden oft folgende Symbole verwendet:

a) Das Symbol „ := “ steht für „per Definition gleich“

- Es wird verwendet, um eine neue Variable oder Funktion zu definieren bzw. einen Namen zu vergeben
- Beispiel:

Aussage: „Es scheint die Sonne“. Diese Aussage soll jetzt A heißen.

Schreibweise: A := „Es scheint die Sonne“.

Aussage: Wir definieren die Variable x als das Doppelte von y.

Schreibweise: $x := 2y$

Definition 2: Wichtige Symbole (Notationen)

b) Das Symbol „ <u>=</u> “ steht für Gleichheit.

- Es wird verwendet, um eine Gleichung oder Identität auszudrücken
- Beispiel:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\downarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

c) Das Symbol „ <u>:</u> “ wird verwendet, um „sodass gilt“ auszudrücken.

Definition 3: Quantoren (Allquantor, Existenzquantor)

a) Der Allquantor wird mit dem Symbol „ ∀ “dargestellt. Er steht für „für alle“.

Beispiel:

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n + 0 = n$

$$\forall \quad n \in \mathbb{N} \quad : \quad n + 0 = n$$

D. h. diese Aussage trifft für **jede** natürliche Zahl n zu.

Definition 3: Quantoren (Allquantor, Existenzquantor)

b) Der <u>Existenzquantor</u> wird mit dem Symbol „∃“ dargestellt.

Er steht für „es gibt (mindestens) ein“

Beispiel:

$$\underbrace{\text{Es gibt}}_{\exists}\ \underbrace{\text{eine natürlichen Zahl n}}_{n\,\in\,\mathbb{N}},\ \underbrace{\text{die größer als 5 ist.}}_{mit\ \ n>5.}$$

n= 6 wäre hier ein gültiges Ergebnis.

Besonderheit: ∃! Steht für „es gibt genau ein“.

Definition 4: Implikation, Äquivalenz

Es seien A und B Aussagen.

a) Gilt $A \Rightarrow B$ für „aus A folgt B“, dann wird dies als Implikation bezeichnet.

Dies bedeutet, dass aus A die Gültigkeit von B folgt.

b) Gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, so schreiben wir $A \Leftrightarrow B$ und bezeichnen dies als Äquivalenz.

Definition 5: Menge

a) Georg Cantor (1895) definiert die Menge wie folgt:

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Beispiel:

$$M_1 := \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad M_2 := \{a, b, d, f, g\} \qquad M_3 := \{a, b, d, f, g, \dots\}$$

Mengen können auch aufgrund definierter Eigenschaften angegeben werden:

Beispiel:

$$M_4 := \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6\}$$

$$M_5 := \{x : E(x)\}$$

Definition 5: Menge (Forts.)

b) Besitzt eine Menge keine Elemente, wird sie als leere Menge bezeichnet und wird als {} bzw. $\emptyset$ dargestellt.

$\mathrm{M} = \{\}$ oder $\mathrm{M} = \emptyset$

c) Ist x ein Element der Menge A, so schreiben wir $\mathrm{x} \in A$.

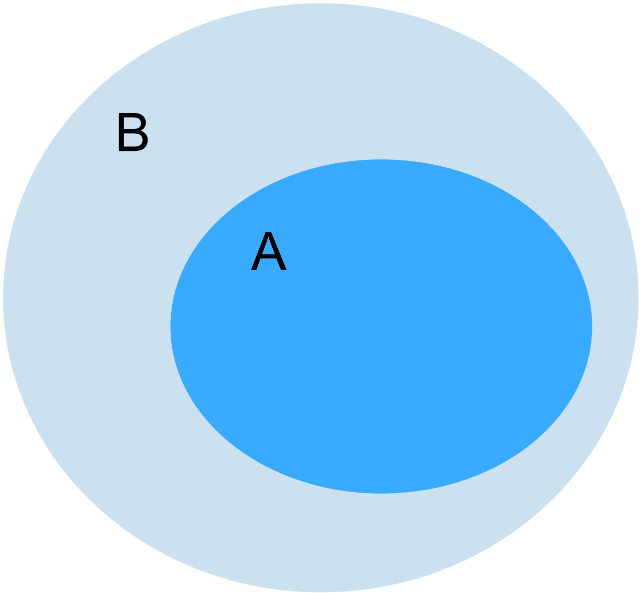
d) Ist x kein Element der Menge A, so schreiben wir $\mathrm{x} \notin A$.

Definition 5: Menge (Forts.)

e) A heißt Teilmenge von B, in Zeichen $A \subset B$, genau dann, wenn aus $\mathrm{x} \in A$ auch $\mathrm{x} \in B$ folgt.

Beispiel:

$$A := \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow A \subset B$$



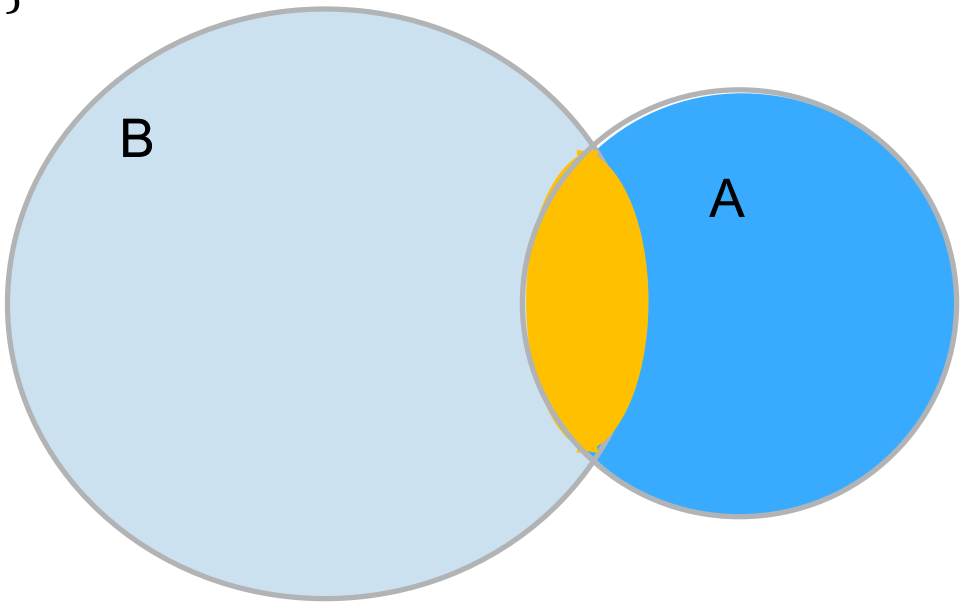
Definition 5: Menge (Forts.)

f) Den Durchschnitt zweier Mengen A und B definieren wir als $A \cap B \coloneqq \{ x : \mathrm{x} \in A \wedge \mathrm{x} \in B \}$

Beispiel:

$$A := \{1, 2, 3, 9, 10\} \quad B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A \cap B \coloneqq \{1,2,3\}$$



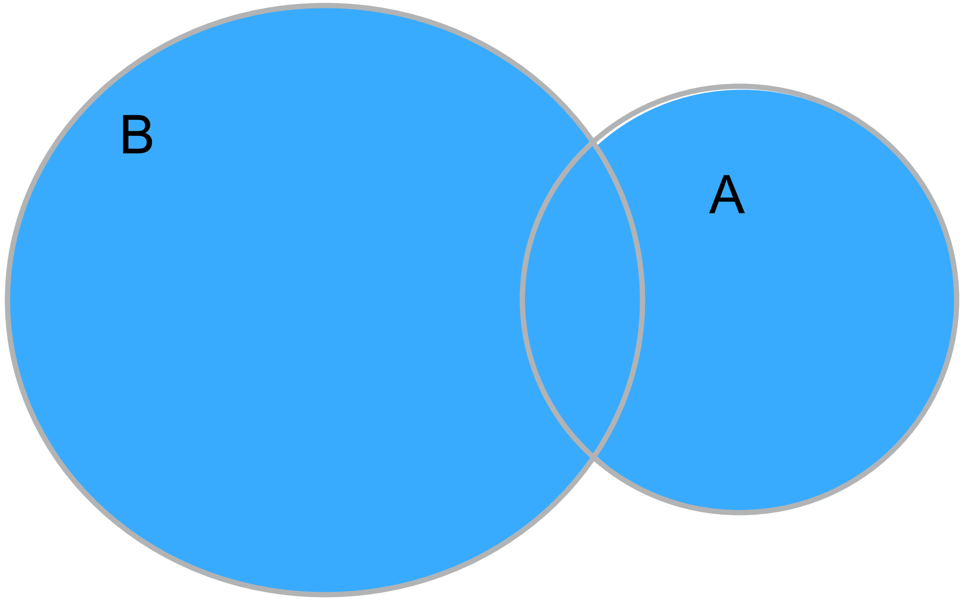
Definition 5: Menge (Forts.)

g) Die Vereinigung zweier Mengen A und B definieren wir als $A \cup B \coloneqq \{ x : \mathrm{x} \in A \vee \mathrm{x} \in B \}$

Beispiel:

$$A := \{1, 2, 3, 9, 10\} \quad B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A \cup B \coloneqq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$



Definition 6: Natürliche Zahlen

a) Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

$$\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$$

b) Die Menge der natürlichen Zahlen mit 0 wird mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnet.

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

Beispiele:

$5 \in \mathbb{N}$, da 5 eine natürliche Zahl ist

$-2 \notin \mathbb{N}$, da natürliche Zahlen nicht negativ sind

Definition 7: Ganze Zahlen und Rationale Zahlen

a) Die Menge der <u>ganzen Zahlen</u> wird als $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

$$\mathbb{Z} \coloneqq \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Beispiele:

$5 \ \in \mathbb{Z}, \text{da 5 eine ganze Zahl ist}$

$-7 \in \ \mathbb{Z}$, da -7 eine ganzzahlige negative Zahl ist

b) Die Menge der <u>rationalen Zahlen</u> wird als $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

$$\mathbb{Q} \coloneqq \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \ \neq 0 \right\}$$

Beispiele:

$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}, \text{da es ein Bruch aus ganz}en \text{ Zahlen ist}$

$-3 \in \mathbb{Q}$, da $-3 = \frac{-3}{1}$

Definition 8: Reelle Zahlen

a) Die Grundmenge der Analysis ist die Menge der reellen Zahlen.

b) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ umfasst alle Zahlen, die auf der Zahlengeraden dargestellt werden können.

Beispiele:

$5 \in \mathbb{R}$, da es eine natürliche Zahl ist

$-2 \in \mathbb{R}$, da es eine ganze Zahl ist

$\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$, weil es eine rationale Zahl ist

Beispiel 1: Mengen

Was bedeuten die nachfolgenden Mengen bzw. wie können sie allgemein dargestellt werden:

a) $M_1 := \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $M_2 := \{3, 4, 5, 6\}$

c) $M_3 := \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$

Definition 9: Funktion, Definitionsmenge, Wertemenge

Seien D und W nicht leere Mengen.

a) Eine Funktion $f\colon D \to W$ ordnet jedem Wert $x \in D$ eindeutig einen Wert $f(x) \in W$ zu.

b) D heißt Definitionsmenge, W heißt Wertemenge der Funktion f.

Beispiel:

Gegeben sind: $D := \{1, 2, 3\}$ $W := \{4, 5, 6\}$

Die Funktion f ist definiert durch:

$$f : D \to W, \qquad f(1) = 6, \qquad f(2) = 5, \qquad f(3) = 4$$

Definition 10: Direkter Beweis

a) Man geht von der (gegebenen, wahren) Voraussetzung (Aussage) A aus und zeigt durch Umformungen oder Folgern, dass aus A die Aussage B folgt.

b) Mathematisch ausgedrückt untersucht man $A \Rightarrow B$.

c) Anmerkung:

- Man beweist Äquivalenzen, also Behauptungen der Form $A \Leftrightarrow B$, wie folgt:
- 1. Schritt: Beweise $A \Rightarrow B$

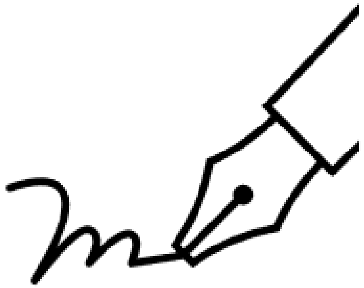
  Die Aussage A wird als wahr gegeben vorausgesetzt und die Aussage B gezeigt.
- 2. Schritt: Beweise $B \Rightarrow A$

  Die Aussage B wird als wahr gegeben vorausgesetzt und die Aussage A gezeigt.

Beispiel 2: Direkter Beweis (Dritte binomische Formel)

Beweisen Sie unter Anwendung des direkten Beweises die dritte binomische Formel:

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$



Definition 11: Indirekter Beweis

Der indirekte Beweis ist manchmal einfacher als der direkte Beweis.

Vorgehensweise:

1. Schritt: Annahme aufstellen (Man geht vom Gegenteil der Behauptung aus).
2. Schritt: Annahme zum Wiederspruch führen
3. Schritt: Wenn der Beweisgang legitim und logisch war, muss die Annahme falsch gewesen sein und damit ist die Behauptung wahr.

Beispiel 3: Indirekter Beweis

Aussage: $\sqrt{2}$ ist irrational

Beweis:

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, d. h. es lässt sich als Bruch zweier ganzer Zahlen p und q $(q \neq 0)$ darstellen, sodass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Dabei seien p und q vollständig gekürzt, also teilerfremd.

Schritt 1: Quadrieren

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2$$

Daraus folgt, p^2 ist eine gerade Zahl.

Beispiel 3: Indirekter Beweis (Forts.)

Schritt 2: Folgerung für p

Daraus ergibt sich, dass p gerade ist. Somit lässt sich p also als

$p = 2 \cdot n \; (wobei \; n \in \mathbb{Z})$ schreiben.

Schritt 3: p in die Gleichung von Schritt 1 einsetzen und nach q auflösen

$$2q^2 = (2n)^2$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 = 4n^2$$

$$\Leftrightarrow q^2 = 2n^2$$

Daraus folgt, dass auch q gerade ist.

Beispiel 3: Indirekter Beweis (Forts.)

Widerspruch:

Wir haben angenommen, das p und q teilerfremd sind.

Allerdings haben p und q den gemeinsamen Teiler 2.

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass der Bruch vollständig gekürzt ist.

Schlussfolgerung:

Die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, führt zu einem Widerspruch.

Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

Satz 1: Vollständige Induktion

Wenn eine Aussage $A(n)$, die von einer natürlichen Zahl n abhängt, für $n = 1$ gilt (**Induktionsanfang**) und aus der Gültigkeit von $A(n)$ (**Induktionsvoraussetzung**) die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt (**Induktionsschritt**), dann gilt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen.

Prinzip der vollständigen Induktion:

- Induktionsanfang: Beweise: Die Aussage $A(n)$ ist wahr für einen Anfangswert $n = 1$
- Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ sei wahr für ein $n \geq 1$
- Induktionsbehauptung: Die Aussage $A(n+1)$ ist wahr.
- Induktionsschritt: $n \to n + 1$ Beweise unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung: Die Aussage $A(n+1)$ ist wahr. Im Fall einer Gleichung: Die linke Seite der Gleichung ist gleich der rechten Seite.

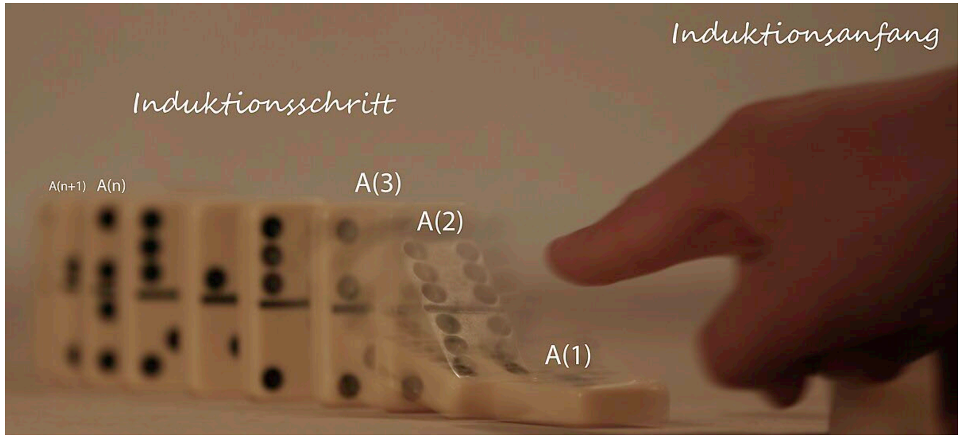
Wenn alle Schritte erfüllt sind, ist die Aussage für alle n bewiesen.

Vollständige Induktion: Die Domino-Kette

- Induktionsanfang: Der erste Dominostein fällt um. n = 1 erfüllt.
- Induktionsvoraussetzung: Ein beliebiger Stein n fällt um. Die Aussage gilt für n.
- Induktionsbehauptung: Wenn ein Dominostein fällt, fallen auch die nachfolgenden Dominosteine $(n+1)$, wenn die Reihe der Dominosteine richtig aufgebaut ist.

  Ist der Abstand zu groß, ist die Induktion zu Ende.
- Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$ Der Dominoeffekt sorgt dafür, dass alle Steine umfallen.

  Die Aussage gilt für alle n.



https://de.m.wikibooks.org/wiki/Datei:Vollst%C3%A4ndige_Induktion_-_Dominoeffekt.jpg

Beispiel 4: Vollständige Induktion

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist n^2. Also gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Beweisen Sie unter Verwendung der vollständigen Induktion diese Aussage.

Beispiel 4: Vollständige Induktion (Forts.)

Beweis:

Induktionsanfang für n = 1:

Linke Seite: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 * 1 - 1 = 1$

Rechte Seite: $1^2 = 1$

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \text{ für } n \in \mathbb{N}$

Induktionsbehauptung: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2 \text{ für } n \in \mathbb{N}$

Beispiel 4: Vollständige Induktion (Forts.)

Beweis (Fortsetzung):

Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)} = n^2$$

Induktionsschritt $n \;{-}{>}\; n+1$:

einsetzen

Linke Seite:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)} + (2(n+1)\ -1)$$

$$\underset{\text{IV}}{=} \boxed{n^2} + 2(n+1) - 1$$

$$= n^2 + 2n + 2\ -1$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

Rechte Seite:

$$(n+1)^2 = (n+1)^2$$

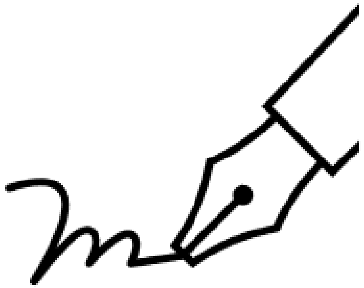
$\square$

Satz 2: Gaußsche Summenformel (nach Carl Friedrich Gauß)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis:



Definition 12: Der Absolutbetrag

Für eine reelle Zahl x wird ihr Absolutbetrag definiert durch

$$|x| \coloneqq \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x| \coloneqq \max(x, -x)$$

Beispiele:

$$|7| = 7$$

$$|-9| = -(-9) = 9$$

Kontrollaufgaben 1:

Welche Aussagen sind wahr:

1. Was ist ein Beweis?
   a) Ein Argument, das die Richtigkeit eines Satzes zeigt.
   b) Eine Vermutung, die noch nicht bewiesen ist.
   c) Eine Definition einer mathematischen Struktur.
   d) Ein spezieller Typ von Axiom.

2. Welche Aussage über ein Lemma ist korrekt?
   a) Ein Lemma ist eine Definition einer neuen mathematischen Theorie.
   b) Ein Lemma ist ein Hilfssatz, der beim Beweis eines größeren Satzes hilft.
   c) Ein Lemma ist eine Aussage, die ohne Beweis angenommen wird.
   d) Ein Lemma ist eine direkte Folgerung aus einem Theorem.

Kontrollaufgaben 1:

Welche Aussagen sind wahr:

3. Welche Eigenschaft hat ein Axiom?
   a) Es muss immer bewiesen werden.
   b) Es ist eine Folgerung aus einem Theorem.
   c) Es ist eine Grundannahme, die als wahr angenommen wird, ohne Beweis.
   d) Es ist eine Hypothese, die geprüft werden muss.

4. Welche der folgenden Zahlen ist eine rationale Zahl aus $\mathbb{Q}$?
   a) $\sqrt{2}$
   b) $\frac{1}{3}$
   c) π
   d) e

Kontrollaufgaben 1:

Welche Aussagen sind wahr:

5. Welche der folgenden Mengen beschreibt die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$?
   a) $\mathbb{Q}$ = { x | x kann als Bruch p/q geschrieben werden, mit p, q ∈ $\mathbb{Z}$ und q ≠ 0 }
   b) $\mathbb{Q}$ = { x | x ist eine ganze Zahl }
   c) $\mathbb{Q}$ = { x | x ist eine natürliche Zahl }
   d) $\mathbb{Q}$ = { x | x hat eine unendliche, nicht periodische Dezimaldarstellung }

6. Welche der folgenden Mengen entspricht den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (inklusive 0)?
   a) $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$
   b) $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$
   c) $\mathbb{N} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$
   d) $\mathbb{N}$ = { x | x ist eine rationale Zahl }

Kontrollaufgaben 1:

Welche Aussagen sind wahr:

7. Welche Aussage kann per Induktion bewiesen werden:

   a) Die Aussage $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ $für\ alle\ x \in \mathbb{R}$ kann per Induktion bewiesen werden.

   b) Die Aussage $4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar $für\ alle\ n \in \mathbb{N}$ kann per Induktion bewiesen werden.

8. Führen Sie für die richtigen Aussagen von Teil 7 eine vollständige Induktion durch.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit