

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2026

Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

Hilfsblatt zur Prüfung am 23. Juli 2026

Folgen und Reihen

Grenzwert einer Folge: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $N(\varepsilon) > 0$, sodass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

Monotone und passend beschränkte Folgen:

Wenn eine Folge monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ und nach $\left\{ \begin{array}{l} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right\}$ beschränkt ist, dann ist sie konvergent.

Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent. (Der Satz über **verallgemeinerte harmonische Reihen** darf **nicht** verwendet werden.)

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$

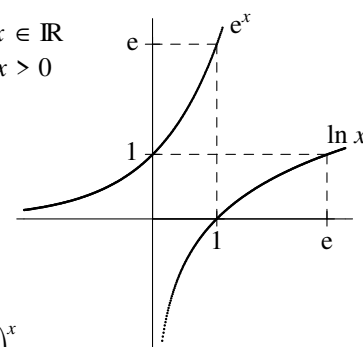
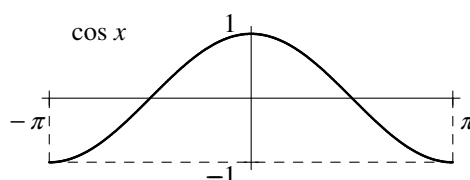
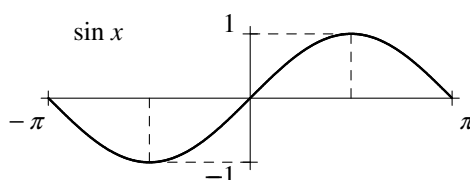
Kriterium	Wenn ...	dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \dots$
Nullfolgenkriterium	a_k keine Nullfolge	divergent
Leibnizkriterium	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ alternierend und $ a_k $ monotone Nullfolge	konvergent
Vergleichskriterium	$ a_k \leq b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent	absolut konvergent
	$a_k \geq b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent	divergent
Quotientenkriterium	$\lim_{k \rightarrow \infty} \left \frac{a_{k+1}}{a_k} \right < 1$	absolut konvergent
	$\lim_{k \rightarrow \infty} \left \frac{a_{k+1}}{a_k} \right > 1$	divergent

Wichtige Funktionen und Gleichungen

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\ln e^x = x \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} = x \text{ für } x > 0$$



$$\frac{1}{a^n} = {}^n\sqrt{a}, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{1}{a^{y-x}}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Ableitungen

Definition: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Funktion	Ableitung		Funktion	Ableitung
c	0		$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
x^a	$a x^{a-1}$		$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$
$\sin x$	$\cos x$		$c f(x)$	$c f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$		$f(x) g(x)$	$f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$
e^x	e^x		$f(g(x))$	$f'(g(x)) g'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$			

Korollar zum Mittelwertsatz:

$>$	streng monoton wachsend
$\geq$	monoton wachsend
$=$	konstant
$\leq$	monoton fallend
$<$	streng monoton fallend

Wenn f' auf einem Intervall I 0 ist, dann ist f auf I

Satz von Taylor: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, wenn $R_n(x, \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für ...

Ableitung der Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$

Regeln von l'Hospital: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$

Integrale

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \text{ wenn } F \text{ eine Stammfunktion von } f \text{ ist.}$$

Partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx, \quad \int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

Integration durch Substitution:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \text{ mit } t = \varphi^{-1}(x) \text{ (Rücksubstitution), wenn } \varphi \text{ umkehrbar ist}$$

Integralkriterium:

$$I + \left\{ \begin{array}{l} f(a) \\ f(b) \end{array} \right\} \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq I + \left\{ \begin{array}{l} f(b) \\ f(a) \end{array} \right\}, \text{ wenn } f \text{ auf } [a, b] \text{ monoton } \left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\} \text{ ist,} \quad I = \int_a^b f(x) dx$$