Name: ______________________________ Matrikelnummer: ________________

Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

Zwischenprüfung am 11. Mai 2017

Hinweise

- Tragen Sie oben Name und Matrikelnummer ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren Lösungen ab!
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zulässig.
- Jeder Täuschungsversuch führt zum Verlust der Prüfungszulassung für dieses Semester.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis bereit!
- Schreiben Sie nicht mit Rotstift oder Bleistift!

1	2	3	4	5	Summe
9	9	15	12	15	60

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1: Eigenschaften von Folgen [9 Punkte]

Geben Sie für jede unten genannte Folge an, welche der Eigenschaften 1 bis 10 sie besitzt und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

1. nach oben beschränkt
2. nach unten beschränkt
3. alternierend
4. geometrisch
5. arithmetisch
6. monoton wachsend
7. monoton fallend
8. konvergent
9. bestimmt divergent
10. unbestimmt divergent

a) $a_n = 2\,n + 3\,n$ ✏ 2, 5, 6, 9, Grenzwert ∞ ✏

b) $a_n = \frac{7}{5^n}$ ✏ 1, 2, 4, 7, 8, Grenzwert 0 ✏

c) $a_n = (n \bmod 2) - \frac{1}{3}$ ✏ 1, 2, 3, 10 ✏

✎

- 3 Punkte pro Teilaufgabe, wenn alles richtig ist.
- Ansonsten normalerweise 0.5 Punkte für jede richtige Eigenschaft und −0.5 Punkte für jede falsche Eigenschaft.
- Da von 8, 9, 10 immer genau eines richtig ist, gibt es hier 0.5 Punkte, wenn genau die richtige Eigenschaft genannt wird, und sonst weder Plus- noch Minuspunkte.
- Am Schluss wird die Gesamtpunktzahl aller drei Teilaufgaben auf ganze Punkte aufgerundet.

✐

Aufgabe 2: Folgen mit bestimmten Eigenschaften [9 Punkte]

Geben Sie jeweils eine Folge an, die die genannten Eigenschaften besitzt!

a) geometrisch, beschränkt, divergent
✏ z. B. $a_n = (-1)^n$ oder $a_n = c\,(-1)^n$ (andere Möglichkeiten gibt es hier wohl nicht) ✏

b) geometrisch, streng monoton wachsend, konvergent ✏ z. B. $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ✏

c) alternierend, unbeschränkt, nicht geometrisch ✏ z. B. $a_n = (-n)^n$ oder $a_n = n\,(-1)^n$ ✏

✎

- 3 Punkte pro Teilaufgabe für eine Folge, die alle genannten Eigenschaften besitzt.
- 1 Punkt, wenn die Folge nur zwei Eigenschaften besitzt (und einigermaßen sinnvoll erscheint; $a_n = (-0)^n$ und $a_n = \frac{2\,n}{3\,n}$ sind z. B. nicht sinnvoll, weil man sie einfacher als $a_n = 0$ bzw. $a_n = \frac{2}{3}$ definieren könnte).

- -1 Punkt, wenn nur die ersten Glieder der Folge aufgezählt werden, d. h. keine allgemeine Definition von a_n angegeben ist.

- $(-1)^n$ statt $a_n = (-1)^n$ o. ä. wird als allgemeine Definition von a_n akzeptiert.

✐

Aufgabe 3: Monotone und beschränkte Folgen [15 Punkte]

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 5$ und $a_{n+1} = \frac{3\,a_n + 8}{7}$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die Folge durch den Wert 2 beschränkt ist!

✎

- Behauptung: $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. [1P]
- Induktionsanfang $n = 1$: $a_1 = 5 \geq 2$ [1P]
- Induktionsschritt $n \to n + 1$:

a_{n+1}

$= \frac{3\,a_n + 8}{7}$ [1P]

$\geq \frac{3 \cdot 2 + 8}{7}$ [1P] (da $a_n \geq 2$ gemäß Induktionsvoraussetzung)

$= \frac{14}{7} = 2$ [1P]

✐

b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton ist!

✎

$a_{n+1} - a_n = \frac{3\,a_n + 8}{7} - a_n$ [1P]

$= \frac{3\,a_n + 8 - 7\,a_n}{7} = \frac{8 - 4\,a_n}{7}$ [1P]

$\leq \frac{8 - 4 \cdot 2}{7} = 0$ [1P] (da $a_n \geq 2$ gemäß Teil a)

Daraus folgt: $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. (a_n) ist monoton fallend. [1P]

✐

c) Begründen Sie, dass die Folge konvergent ist, und bestimmen Sie Ihren Grenzwert!

✎

Da die Folge monoton fallend [1P] und nach unten beschränkt [1P] ist, ist sie konvergent.

Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

Dann gilt aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte: $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\,a_n + 8}{7} = \frac{3\,a + 8}{7}$, das heißt:

$a = \frac{3\,a + 8}{7}$ [1P]

$\Leftrightarrow 7\,a = 3\,a + 8$ [1P]

$\Leftrightarrow 4\,a = 8$ [1P]

$\Leftrightarrow a = 2$ [1P]

✐

Aufgabe 4: Konvergenzbeweise [12 Punkte]

Wie lautet der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{3\,n^2+2}{-5\,n^2-4}$?
Beweisen Sie Ihre Aussage direkt mit Hilfe der Grenzwertdefinition!

✎

- Der Grenzwert lautet $a = -\frac{3}{5}$. [1P]
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. [1P]
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:

  $|a_n - a|$

  $= \left| \frac{3\,n^2+2}{-5\,n^2-4} - \left(-\frac{3}{5}\right) \right|$ [1P]

  $= \left| \frac{3\,n^2+2}{-5\,n^2-4} + \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{(3\,n^2+2)\cdot 5 + 3\cdot(-5\,n^2-4)}{(-5\,n^2-4)\cdot 5} \right|$

  (oder auch $\left| \frac{(3\,n^2+2)\cdot 5 - (-3)\cdot(-5\,n^2-4)}{(-5\,n^2-4)\cdot 5} \right|$ oder $\left| \frac{(3\,n^2+2)\cdot(-5) - 3\cdot(-5\,n^2-4)}{(-5\,n^2-4)\cdot(-5)} \right|$) [1P]

  $= \left| \frac{15\,n^2+10-15\,n^2-12}{-25\,n^2-20} \right|$ (oder $\left| \frac{-15\,n^2-10+15\,n^2+12}{25\,n^2+20} \right|$) [1P]

  $= \left| \frac{-2}{-25\,n^2-20} \right|$ (oder $\left| \frac{2}{25\,n^2+20} \right|$) [1P]

  $= \frac{2}{25\,n^2+20}$ [1P]

  $< \frac{2}{25\,n^2}$ [1P]

  $< \frac{1}{n^2}$ [1P]

  $\leq \frac{1}{n}$ [1P]

  $< \varepsilon$, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$ [1P]

- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$ [1P]

✐

Aufgabe 5: Konvergenz von Reihen [15 Punkte]

Geben Sie für jede Reihe an, ob sie absolut konvergent, bedingt konvergent oder divergent ist und begründen Sie Ihre Aussage jeweils, indem Sie u. a. das verwendete Konvergenzkriterium nennen!

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$

✎

- Die Folge der Glieder $a_k = (-1)^k \frac{k}{k+1}$ ist keine Nullfolge. [1P]
- Daher ist die Reihe divergent. [1P]

✐

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$

✎

$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(k+1)^3}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k^3} \right|$ [1P]

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(k+1)^3}{k^3}$ [1P]

$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$ [1P]

Da dieser Grenzwert < 1 ist, ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent. [1P]

✐

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1}$

✎

- Die Reihe ist alternierend [1P]
- und $|a_k| = \frac{2}{k}$ ist eine monotone Nullfolge. [1P]
- Daher ist die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent. [1P]
- Für die Absolutbeträge gilt jedoch: $|a_k| = \frac{2}{k} \geq \frac{1}{k}$ [1P]
- Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist, ist somit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$ divergent. [1P]
- Also ist die gegebene Reihe bedingt konvergent. [1P]

✐

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k\,4^k}$

✎

- Es gilt: $|a_k| = \frac{3}{k\,4^k} \leq \frac{3}{4^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ [1P]
- Da die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k}$ konvergent ist, [1P]
  ist die gegebene Reihe nach dem Vergleichskriterium absolut konvergent. [1P]
- Alternativ kann auch das Quotientenkriterium (ähnlich wie bei Teilaufgabe b) angewandt werden.

✐