Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

9. Übungsblatt (29. Mai 2017)

Aufgabe 21: Direkte Ableitung von Funktionen

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen ohne Verwendung bekannter Ableitungsregeln direkt durch Anwendung der Definition, d. h. durch Berechnung von $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$!

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$

✎

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{x - a} = \frac{\frac{a^2 - x^2}{x^2 a^2}}{x - a} = \frac{(a - x)(a + x)}{x^2 a^2 (x - a)} = -\frac{a + x}{x^2 a^2} \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\frac{2a}{a^4} = -\frac{2}{a^3} \text{ für } a \neq 0$$

Also: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ für $x \neq 0$

✐

b) $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$ (Hinweis: $x - a = \sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2$)

✎

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ für } a > 0$$

Also: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$

✐

Aufgabe 22: Anwendung von Ableitungsregeln

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ für $x \neq -1$

✎

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x + 1) - (x - 1) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

✐

b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

✎

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

✐

c) $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$

✎

$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2\,x$ (Kettenregel, Additionstheorem)

✐

d) $f(x) = \sin x^2 = \sin\left(x^2\right)$

✎

$f'(x) = \cos x^2 \cdot 2\,x = 2\,x \cos x^2$ (Kettenregel)

✐

e) $f(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

✎

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}}\,(0 - 2 \sin x \cos x) = -\dfrac{2 \sin x \cos x}{2 \cos x} = -\sin x$ (zweimal Kettenregel)

✐

f) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

✎

$f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (Quotientenregel)

✐

g) $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

✎

$f'(x) = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (Quotientenregel)

✐

Aufgabe 23: Quotientenregel

Beweisen Sie die Quotientenregel unter Verwendung folgender Regeln:

- Produktregel
- Kettenregel
- Die Ableitung von $\frac{1}{x}$ ist $-\frac{1}{x^2}$

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{u(x)}{v(x)}$ als Produkt $u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$ und differenzieren Sie dieses mit Hilfe der genannten Regeln!

✎

- Für $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$ gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \left(-\frac{1}{(v(x))^2}\right) \cdot v'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2}$$

✐

Aufgabe 24: Bestimmung von Extremwerten

Bestimmen Sie die lokalen Extrema folgender Funktionen:

a) $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 5$

✎

$$f'(x) = -3x^2 - 3x + 6 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{-6} = \frac{3 \pm 9}{-6} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$f''(x) = -6x - 3$

$f''(-2) = 9 > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei $x = -2$

$f''(1) = -9 < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum bei $x = 1$

✐

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 7$

✎

$$f'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x = 2x\left(x^2 - 2x - 3\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$f''(x) = 6x^2 - 8x - 6$

$f''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei $x = -1$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum bei $x = 0$

$f''(3) = 24 > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei $x = 3$

✐

Hinweise:

- Nach dem Satz von Fermat muss für ein lokales Extremum $f'(x) = 0$ gelten.
- Wenn dann $f''(x) > 0$ ist, handelt es sich um ein lokales Minimum, bei $f''(x) < 0$ um ein lokales Maximum.
- Eine Gleichung dritten Grades ohne konstantes Glied kann man durch Ausklammern von x auf eine Gleichung zweiten Grades reduzieren.