Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

8. Übungsblatt (18. Mai 2017)

Aufgabe 19: Rechenregeln für Grenzwerte

Führen Sie die folgenden Grenzwerte durch Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte auf Grenzwerte zurück, die in der Vorlesung bereits bestimmt wurden:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x}$

✎

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{x}{\sin x} = \left(\lim_{x\to 0} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

✐

Aufgabe 20: Stetigkeit

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f(x)$ und jeweils eine oder mehrere Stellen $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ $a = 2$ und $a = -2$

b) $f(x) = \lceil x \rceil = \min \{ z \in \mathbb{Z} \mid x \le z \}$ $a \in \mathbb{Z}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$

Beantworten Sie jeweils die folgenden Fragen und begründen/beweisen Sie Ihre Antworten:

1. Ist die Funktion $f(x)$ an den Stellen a linksseitig stetig, rechtsseitig stetig, stetig, stetig fortsetzbar?

2. Wie lauten die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, sofern sie existieren?

✎

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ $\qquad$ $a = 2$ und $a = -2$

- Für $x \notin \{-2, 2\}$ gilt: $f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$
- An der Stelle $a = 2$ gilt:
  - $f(x)$ ist an der Stelle a nicht definiert und daher in keiner Weise stetig.
  - $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$, da $x - 2 \underset{x\to 2}{\to} 0$ und $x - 2$ für $x < 2$ negativ ist.
  - $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$, da $x - 2 \underset{x\to 2}{\to} 0$ und $x - 2$ für $x > 2$ positiv ist.
  - Also ist f an der Stelle 2 nicht stetig fortsetzbar, da $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nicht existiert.
- An der Stelle $a = -2$ gilt:
  - $f(x)$ ist an der Stelle a nicht definiert und daher in keiner Weise stetig.
  - $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$
  - Also ist f an der Stelle -2 stetig fortsetzbar.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

b) $f(x) = \lceil x \rceil = \min\{ z \in \mathbb{Z} \mid x \le z \}$ $\qquad$ $a \in \mathbb{Z}$

- Für $\delta \le 1$ gilt:
  - $f(a) = a$
  - $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = a + 1$, da $f(x) = a + 1$ für $0 < x - a < \delta$
  - $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = a$, da $f(x) = a$ für $-\delta < x - a < 0$

  Daraus folgt:
  - $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert nicht.
  - f ist an der Stelle a nicht stetig und auch nicht stetig fortsetzbar.
  - f ist an der Stelle a linksseitig stetig, aber nicht rechtsseitig stetig.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$

- Es gilt:
  - In jeder Umgebung von a gibt es sowohl $x \in \mathbb{Q}$ (d. h. $f(x) = 1$) als auch $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (d. h. $f(x) = 0$).
  - Daher existiert weder $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ noch $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$.
  - Also ist f an der Stelle a in keiner Weise stetig und auch nicht stetig fortsetzbar.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ existieren nicht.

✐