Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

7. Übungsblatt (11. Mai 2017)

Aufgabe 16: Grenzwertdefinition

Formulieren Sie die Definition folgender Grenzwerte direkt ohne Verwendung von „Textkästen“ und geben Sie jeweils ein passendes Beispiel an:

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ b) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

✎

a) Definition: f besitzt an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ den (beidseitigen) uneigentlichen Grenzwert ∞, wenn gilt:
Zu jedem $Y > 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt:
$f(x) > Y$ für $0 < |x - a| < \delta(Y)$.

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

b) Definition: f besitzt an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ den linksseitigen uneigentlichen Grenzwert $-\infty$, wenn gilt:
Zu jedem $Y < 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt:
$f(x) < Y$ für $-\delta(Y) < x - a < 0$.

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

c) Definition: f besitzt für $x \to -\infty$ den (rechtsseitigen) (eigentlichen) Grenzwert $b \in \mathbb{R}$, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $X(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$|f(x) - b| < \varepsilon$ für $x < X(\varepsilon)$.

Beispiel: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

✐

Aufgabe 17: Grenzwerte

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{4x^2 - 4x - 24}{x - 3}$.

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert bzw. nicht definiert?

b) Berechnen Sie einige Funktionswerte in der Nachbarschaft der undefinierten Stelle, um eine Vermutung über den Grenzwert an dieser Stelle zu erhalten!

c) Beweisen Sie Ihre Vermutung durch Anwendung der Grenzwertdefinition, indem Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ das zugehörige $\delta(\varepsilon)$ angeben!

d) Wie lauten konkret $\delta(0.01)$ und $\delta(0.001)$?

✎

a) Die Funktion ist für alle $x \neq 3$ definiert.

b) Funktionswerte in der Nachbarschaft von 3:

x	2.9	2.99	2.999	3.1	3.01	3.001
$f(x)$	19.6	19.96	19.996	20.4	20.04	20.004

Vermutung: $\lim_{x \to 3} f(x) = 20$

c) Beweis der Vermutung:

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass gilt: $|f(x) - 20| < \varepsilon$ für $0 < |x - 3| < \delta(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $\delta(\varepsilon)$: Für $x \neq 3$ gilt:

$$|f(x) - 20| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24}{x - 3} - 20 \right| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24 - 20(x - 3)}{x - 3} \right| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24 - 20x + 60}{x - 3} \right| =$$

$$\left| \frac{4x^2 - 24x + 36}{x - 3} \right| = \left| \frac{4(x^2 - 6x + 9)}{x - 3} \right| = \left| \frac{4(x - 3)^2}{x - 3} \right| = 4\,|x - 3| < \varepsilon, \text{ wenn } |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

- Wähle daher $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$.
- Dann gilt für $0 < |x - 3| < \delta(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|f(x) - 20| < \varepsilon$

d) $\delta(0.01) = \frac{0.01}{4} = 0.0025, \qquad \delta(0.001) = \frac{0.001}{4} = 0.00025$

✐

Aufgabe 18: Grenzwerte

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3 - \frac{2}{x-2}$.

Geben Sie die Grenzwerte für $x \to 2+$, $x \to 2-$, $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an und beweisen Sie Ihre Aussagen jeweils!

✎

a) $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = -\infty$

Beweis:

- Zu zeigen: Zu jedem $Y < 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt: $f(x) < Y$ für $0 < x - 2 < \delta(Y)$.
- Sei $Y < 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $\delta(Y)$: Für $x > 2$ gilt:

  $f(x) = 3 - \frac{2}{x-2} < Y$, wenn $3 - Y < \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 < \frac{2}{3-Y}$

  (Beachte beim Umformen der Ungleichung:
  $x - 2 > 0$ und $3 - Y > 0$, daher bleibt das Ungleichheitszeichen unverändert.)
- Wähle daher $\delta(Y) = \frac{2}{3-Y}$.
- Dann gilt für $0 < x - 2 < \delta(Y)$ aufgrund der Vorüberlegung: $f(x) < Y$

b) $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \infty$

Beweis:

- Zu zeigen: Zu jedem $Y > 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt: $f(x) > Y$ für $-\delta(Y) < x - 2 < 0$.
- Sei $Y > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $\delta(Y)$: Für $x < 2$ gilt:

  $f(x) = 3 - \frac{2}{x-2} > -\frac{2}{x-2} > Y$, wenn $-\frac{2}{Y} < x - 2$

  (Beachte beim Umformen der Ungleichung:
  $x - 2 < 0$ und $Y > 0$, daher dreht sich das Ungleichheitszeichen um.)
- Wähle daher $\delta(Y) = \frac{2}{Y}$.
- Dann gilt für $-\delta(Y) < x - 2 < 0$ aufgrund der Vorüberlegung: $f(x) > Y$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$

Beweis:

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $X(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $|f(x) - 3| < \varepsilon$ für $x > X(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $X(\varepsilon)$: Für $x > 2$ gilt:

  $|f(x) - 3| = \left|3 - \frac{2}{x-2} - 3\right| = \left|-\frac{2}{x-2}\right| = \frac{2}{x-2} < \varepsilon$, wenn $\frac{2}{\varepsilon} < x - 2 \Leftrightarrow x > 2 + \frac{2}{\varepsilon}$

  (Beachte beim Weglassen der Betragsstriche und beim Umformen der Ungleichung: $x - 2 > 0$ und $\varepsilon > 0$.)

- Wähle daher $X(\varepsilon) = 2 + \frac{2}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $x > X(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|f(x) - 3| < \varepsilon$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Beweis:

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $X(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $|f(x) - 3| < \varepsilon$ für $x < X(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $X(\varepsilon)$: Für $x < 2$ gilt:

  $|f(x) - 3| = \left|3 - \frac{2}{x-2} - 3\right| = \left|-\frac{2}{x-2}\right| = -\frac{2}{x-2} < \varepsilon$, wenn $-\frac{2}{\varepsilon} > x - 2 \Leftrightarrow x < 2 - \frac{2}{\varepsilon}$

  (Beachte beim Weglassen der Betragsstriche und beim Umformen der Ungleichung: $x - 2 < 0$ und $\varepsilon > 0$.)
- Wähle daher $X(\varepsilon) = 2 - \frac{2}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $x < X(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|f(x) - 3| < \varepsilon$

✐