Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

6. Übungsblatt (27. April 2017)

Aufgabe 15: Konvergenz von Reihen

Geben Sie für jede Reihe an, ob sie absolut konvergent, bedingt konvergent oder divergent ist und begründen Sie Ihre Aussage jeweils, indem Sie u. a. das verwendete Konvergenzkriterium nennen!

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k+1}}$

✎

Für die Glieder der Reihe gilt: $\sqrt{\frac{k}{k+1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$, d. h. die Folge der Glieder ist keine Nullfolge.

Daher ist die Reihe divergent.

✐

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Hinweis: Vergleich mit einer geometrischen Reihe, denn es gilt: $k! \geq 2^k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$.
(Zeigen Sie dies durch vollständige Induktion!)

✎

Für die Glieder der Reihe gilt: $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^k}$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$.

Da die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ absolut konvergent ist, ist auch die gegebene Reihe gemäß Vergleichskriterium absolut konvergent.

Beweis der Aussage $k! \geq 2^k$ für $k \geq 4$:

Induktionsanfang $k = 4$: $k! = 4! = 24 \geq 16 = 2^4 = 2^k$

Induktionsschritt $k \to k+1$: $(k+1)! = (k+1) \cdot k! \geq 2 \cdot k! \geq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

✐

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$

✎

Die Reihe ist alternierend, und die Folge der Absolutbeträge $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ihrer Glieder ist eine monoton fallende Nullfolge.

Daher ist die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent.

Für die Absolutbeträge der Glieder gilt wegen $\sqrt{k} \leq k$: $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da die harmonische Reihe divergent ist, ist somit auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ gemäß Vergleichskriterium divergent.

Daher ist die gegebene Reihe nicht absolut konvergent, sondern nur bedingt konvergent.

✐

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)!}$

✎

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{3^{k+1}}{(k+2)!} \cdot \frac{(k+1)!}{3^k} = \frac{3}{k+2} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Daher ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

✐

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

✎

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$$

Daher ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

✐

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{5^{k+1}}$

✎

$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k!}{5^{k+2}} \cdot \frac{5^{k+1}}{(k-1)!} = \frac{k}{5} \geq 1$ für $k \geq 5$, d. h. für fast alle $k \in \mathbb{N}$

Daher ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium divergent.

✐

g) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2}$

✎

Die Reihe ist alternierend und $|a_k| = \frac{k+1}{k^2}$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Daher ist die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent.

Dass $b_k = \frac{k+1}{k^2}$ eine Nullfolge ist, ist offensichtlich, weil die Potenz von k im Nenner höher ist als im Zähler.

Dass die Folge monoton ist, muss jedoch begründet werden. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. $b_{k+1} - b_k = \frac{k+2}{(k+1)^2} - \frac{k+1}{k^2} = \frac{(k+2) \cdot k^2 - (k+1) \cdot (k+1)^2}{(k+1)^2 \cdot k^2} = \frac{\left(k^3 + 2k^2\right) - \left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right)}{(k+1)^2 \cdot k^2} = \frac{-k^2 - 3k - 1}{(k+1)^2 \cdot k^2} < 0$
   Also ist $\left(b_k\right)$ (streng) monoton fallend.

2. $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k+2}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{k+1} = \frac{k^3 + 2\,k^2}{k^3 + 3\,k^2 + 3\,k + 1} < 1$
   Also ist $\left(b_k\right)$ (streng) monoton fallend.

3. $b_k = \frac{k+1}{k^2} = \frac{k}{k^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \Rightarrow b_{k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} = b_k$
   Also ist $\left(b_k\right)$ (streng) monoton fallend.

Für die Absolutbeträge gilt jedoch: $\frac{k+1}{k^2} \geq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$.
Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist, ist somit auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}$ divergent.

Also ist die gegebene Reihe bedingt konvergent.

Versuch mit Quotientenkriterium: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+2}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{k+1} = \frac{k^3 + 2\,k^2}{k^3 + 3\,k^2 + 3\,k + 1} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 1$

Der Quotient ist zwar immer kleiner als 1, aber da der Grenzwert gleich 1 ist, gibt es keine Konstante $C < 1$, für die gilt: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq C$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Deshalb hilft das Quotientenkriterium hier nicht weiter.
(Das Quotientenkriterium unterscheidet grundsätzlich nur zwischen absoluter Konvergenz und Divergenz, über bedingte Konvergenz macht es keine Aussage.)
✐