Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2017/2018
Dr. Judith Fingerhuth

5. Übungsblatt (10. November 2017)

Aufgabe 14: Rechenregeln für Reihen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen, indem sie jede Reihe gemäß Definition durch den entsprechenden Grenzwert ersetzen und dann bekannte Rechenregeln für Summen und Grenzwerte anwenden!

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (sofern eine der beiden Reihen existiert)

✎

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c\, a_k = \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} a_k = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

✐

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (sofern eine der beiden Reihen existiert)

✎

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \right) = a_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

✐

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ für $|q| < 1$

(Dies kann entweder direkt mit der Definition einer Reihe unter Verwendung der Übungsaufgabe „Geometrische Summe“ gezeigt werden oder mit Hilfe von Teil b und der Aussage $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ aus der Vorlesung.)

✎

Entweder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q^k - q^0 \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(q^{n+1}-1)-(q-1)}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-q}{q-1} =$$

$$= \frac{-q}{q-1} = \frac{q}{1-q}$$

Oder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - q^0 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1-(1-q)}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

✐

Aufgabe 15: Reihen

a) Nennen Sie zwei bekannte, wichtige Reihen!
Konvergieren diese, bzw. was muss gelten, damit sie konvergieren?

✎

- Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert nicht.
- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$.

✐

b) Nennen/erfinden Sie eine alternierende Reihe $\sum_k a_k$!

Berechnen Sie die ersten vier Glieder der zugehörigen Folge (a_k): $a_1 = \ldots$, $a_2 = \ldots$ etc.

Berechnen Sie die ersten vier Partialsummen der Reihe: $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \ldots$, $\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = \ldots$ etc.

✎

Zum Beispiel: $\sum_k (-1)^k$ oder $\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Folgenglieder und Partialsummen für diese Beispiele:

	$\sum_k (-1)^k$	$\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
a_1	-1	$+1$
a_2	$+1$	$-\frac{1}{2}$
a_3	-1	$+\frac{1}{3}$
a_4	$+1$	$-\frac{1}{4}$
$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$	-1	$+1$
$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2$	$-1 + 1 = 0$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3$	$-1 + 1 - 1 = -1$	$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$-1 + 1 - 1 + 1 = 0$	$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

✐

c) Betrachten Sie die Folge (a_k) mit $a_0 = 3$, $a_1 = 1$ und $a_k = 0$ für $k \geq 2$.

- Konvergiert die zugehörige Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$?
- Was ist der Wert der Reihe, wenn Sie die Summation bei $k_0 = 0$ beginnen?
- Was ist der Wert der Reihe, wenn Sie die Summation bei $k_0 = 1$ beginnen?
- Was ist der Wert der Reihe, wenn Sie die Summation bei $k_0 = 2$ beginnen?
- Was ist der Wert der Reihe, wenn Sie die Summation bei $k_0 = 10$ beginnen?
- Was kann also mit dem Wert einer Reihe passieren, wenn Sie die Summation bei einem anderen k_0 starten?

✎

- Die Reihe konvergiert.
- Es ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = 3 + 1 + 0 + 0 + \ldots = 4$.
- Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1$.
- Es ist $\sum_{k=2}^{\infty} a_k = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$.
- Es ist $\sum_{k=10}^{\infty} a_k = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$.
- Der Wert einer Reihe kann sich also ändern, wenn man die Summation bei einem anderen k_0 startet. (Er kann aber auch gleich bleiben: $\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \sum_{k=10}^{\infty} a_k = 0$.)

✐