Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

5. Übungsblatt (20. April 2017)

Aufgabe 13: Rechenregeln für Reihen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen, indem sie jede Reihe gemäß Definition durch den entsprechenden Grenzwert ersetzen und dann bekannte Rechenregeln für Summen und Grenzwerte anwenden!

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (sofern eine der beiden Reihen existiert)

✎

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c\, a_k = \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} a_k = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

✐

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (sofern eine der beiden Reihen existiert)

✎

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \right) = a_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

✐

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ für $|q| < 1$

(Dies kann entweder direkt mit der Definition einer Reihe unter Verwendung der Übungsaufgabe „Geometrische Summe“ gezeigt werden oder mit Hilfe von Teil b und der Aussage $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ aus der Vorlesung.)

✎

Entweder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q^k - q^0 \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(q^{n+1}-1)-(q-1)}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-q}{q-1} =$$

$$= \frac{-q}{q-1} = \frac{q}{1-q}$$

Oder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - q^0 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1-(1-q)}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

✐

Aufgabe 14: Periodische Dezimalbrüche

a) Der periodische Dezimalbruch $0.\bar{3}$ kann als Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$ aufgefasst werden.
Berechnen Sie den Wert dieser Reihe als gewöhnlichen Bruch!

✎

$$0.\bar{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 3 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 3 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

✐

b) Berechnen Sie auf die gleiche Art $0.\overline{09}$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den resultierenden Bruch mittels Division wieder in einen periodischen Dezimalbruch umwandeln!

✎

$$0.\overline{09} = \frac{9}{100} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{1000000} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{100^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 9 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 9 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{1}{11}$$

$1 : 11 = 0.\overline{09}$

✐