Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2018
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

4. Übungsblatt (23. April 2018)

Aufgabe 11: Wurzelberechnungen

Berechnen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners – unter ausschließlicher Verwendung der vier Grundrechenarten – einige Dezimalstellen von $\sqrt{7}$, und zwar

a) durch fortgesetzte Intervallhalbierung (mit Anfangsintervall $[0, 8]$);

b) durch Anwendung des Heron-Verfahrens!

Welches Verfahren konvergiert schneller?

✎

a) Intervallhalbierung

- $I_1 = [a_1, b_1] = [0, 8]$,
  $c_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + b_1\right) = \frac{1}{2}(0 + 8) = 4, \quad c_1^2 = 4^2 = 16 > 7$
- $I_2 = [a_2, b_2] = [a_1, c_1] = [0, 4]$ (linke Hälfte von I_1),
  $c_2 = \frac{1}{2}\left(a_2 + b_2\right) = \frac{1}{2}(0 + 4) = 2, \quad c_2^2 = 2^2 = 4 < 7$
- $I_3 = [a_3, b_3] = [c_2, b_2] = [2, 4]$ (rechte Hälfte von I_2),
  $c_3 = \frac{1}{2}\left(a_3 + b_3\right) = \frac{1}{2}(2 + 4) = 3, \quad c_3^2 = 3^2 = 9 > 7$
- $I_4 = [a_4, b_4] = [a_3, c_3] = [2, 3]$ (linke Hälfte von I_3),
  $c_4 = \frac{1}{2}\left(a_4 + b_4\right) = \frac{1}{2}(2 + 3) = 2.5, \quad c_3^2 = 2.5^2 = 6.25 < 7$
- $I_5 = [a_5, b_5] = [c_4, b_4] = [2.5, 3]$ (rechte Hälfte von I_4),
  $c_5 = \frac{1}{2}\left(a_5 + b_5\right) = \frac{1}{2}(2.5 + 3) = 2.75, \quad c_5^2 = 2.75^2 = 7.5625 > 7$
- $I_6 = [a_6, b_6] = [a_5, c_5] = [2.5, 2.75]$ (linke Hälfte von I_5),
  $c_6 = \frac{1}{2}\left(a_6 + b_6\right) = \frac{1}{2}(2.5 + 2.75) = 2.625, \quad c_6^2 = 2.625^2 = 6.890625 < 7$
- c_6 besitzt zwei korrekte Dezimalstellen von $\sqrt{7} = 2.64575131106459$

b) Heron-Verfahren

- $a_1 = x + 1 = 7 + 1 = 8$
- $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{7}{8}\right) = 4.4375$
- $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{x}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(4.4375 + \frac{7}{4.4375}\right) = 3.0074823943662$
- $a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{x}{a_3}\right) = \ldots = 2.66750528323608$
- $a_5 = \frac{1}{2}\left(a_4 + \frac{x}{a_4}\right) = \ldots = 2.64584001478867$
- $a_6 = \frac{1}{2}\left(a_5 + \frac{x}{a_5}\right) = \ldots = 2.64575131255152$
- a_6 besitzt neun korrekte Dezimalstellen von $\sqrt{7} = 2.64575131106459$

Das Heron-Verfahren konvergiert offenbar wesentlich schneller als das Bisektionsverfahren:

- Beim Bisektionsverfahren gewinnt man durch die Intervallhalbierung in jedem Schritt genau eine Dualstelle an Genauigkeit. Wegen $\log_2 10 \approx 3.32$ braucht man pro Dezimalstelle mehr als drei Schritte.
- Das Heron-Verfahren konvergiert „quadratisch“:
  - Für den Fehler $\Delta_n = a_n - \sqrt{x}$ zwischen a_n und $\sqrt{x}$ gilt laut Vorlesung:
    $\Delta_{n+1} = a_{n+1} - \sqrt{x} = \frac{(a_n - \sqrt{x})^2}{2\,a_n} \approx \left(a_n - \sqrt{x}\right)^2 = \Delta_n^2.$
  - Das heißt: Wenn $\Delta_n \approx 10^{-k}$ ist (k korrekte Nachkommastellen),
    dann ist $\Delta_{n+1} \approx \left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$ ($2\,k$ korrekte Nachkommastellen).
  - Das bedeutet, dass sich die Anzahl korrekter Stellen in jedem Schritt etwa verdoppelt!

✐

Aufgabe 12: Grenzwertbeweise mit der Ungleichung von Bernoulli

Zeigen Sie direkt mit Hilfe der jeweiligen Grenzwertdefinition, dass für $x > 1$ gilt:

a) $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

b) $\frac{1}{x^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Hinweis: x^n kann jeweils mit der Ungleichung von Bernoulli abgeschätzt werden.

✎

a) $a_n = x^n$

- Zu zeigen: Zu jedem $A > 0$ gibt es ein zugehöriges $N(A) > 0$, sodass gilt: $a_n > A$ für $n > N(A)$.
- Sei $A > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(A)$:
  $a_n = x^n \geq 1 + n\,(x-1) > n\,(x-1) > A$, wenn $n > \frac{A}{x-1}$.

- Wähle daher $N(A) = \frac{A}{x-1}$.
- Dann gilt für $n > N(A)$ aufgrund der Vorüberlegung: $a_n > A$

b) $a_n = \frac{1}{x^n}$

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $N(\varepsilon) > 0$, sodass gilt: $|a_n - 0| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
  $|a_n - 0| = \left| \frac{1}{x^n} \right| = \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{1 + n\,(x-1)} < \frac{1}{n\,(x-1)} < \varepsilon$, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon(x-1)}$.
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon(x-1)}$.
- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - 0| < \varepsilon$

✐

Aufgabe 13: Cauchy-Folgen

Welche der unten genannten Folgen sind Cauchy-Folgen?

Beweisen Sie Ihre Behauptung jeweils direkt durch Anwendung der Definition einer Cauchy-Folge!

a) $a_n = \frac{5\,n - 4}{3\,n + 2}$

✎

Behauptung: (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
  Für $n > m$ gilt:
  $$|a_n - a_m| = \left| \frac{5\,n-4}{3\,n+2} - \frac{5\,m-4}{3\,m+2} \right| = \left| \frac{(5\,n-4)\,(3\,m+2) - (5\,m-4)\,(3\,n+2)}{(3\,n+2)\,(3\,m+2)} \right| =$$
  $$= \left| \frac{15\,n\,m + 10\,n - 12\,m - 8 - 15\,m\,n - 10\,m + 12\,n + 8}{(3\,n+2)\,(3\,m+2)} \right| = \left| \frac{22\,n - 22\,m}{(3\,n+2)\,(3\,m+2)} \right| = \frac{22\,n - 22\,m}{(3\,m+2)\,(3\,n+2)} <$$
  $$< \frac{22\,n}{(3\,m+2)\,(3\,n+2)} < \frac{22\,n}{m\,n} = \frac{22}{m} < \varepsilon, \text{ wenn } m > \frac{22}{\varepsilon}$$
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{22}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $n > m > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a_m| < \varepsilon$

✐

b) $a_n = c^n$ für ein festes $c > 1$

✎

Behauptung: (a_n) ist keine Cauchy-Folge.

Beweis:

- Für $n > m$ gilt:
  $|a_n - a_m| = |c^n - c^m| = c^n - c^m = c^m \left(c^{n-m} - 1\right) > 1 \cdot (c-1) = c - 1 > \varepsilon$, sofern $\varepsilon < c - 1$
  (Beachte: Aus $c > 1$ folgt $c^m > 1$ und $c^{n-m} \geq c$.)

- Das bedeutet für $\varepsilon < c - 1$:
  Egal wie man $N(\varepsilon)$ wählen würde, für $n > m > N(\varepsilon)$ gilt immer: $|a_n - a_m| > \varepsilon$.
  Also ist die Bedingung „Zu *jedem* $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $N(\varepsilon) > 0$, sodass gilt: …“ für $\varepsilon < c - 1$ nicht erfült.

✐

c) $a_n = (-1)^n$

✎

Behauptung: (a_n) ist keine Cauchy-Folge.

Beweis:

- Für $n > m$ gilt:
  $$|a_n - a_m| = |(-1)^n - (-1)^m| = \begin{cases} 0, \text{ wenn } n \text{ und } m \text{ beide gerade oder beide ungerade sind} \\ 2 \text{ sonst} \end{cases}$$

- Das bedeutet für $\varepsilon < 2$:
  Egal wie man $N(\varepsilon)$ wählen würde, es gibt immer irgendwelche $n > m > N(\varepsilon)$, für die gilt: $|a_n - a_m| > \varepsilon$.

✐