Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2017/2018
Dr. Judith Fingerhuth

4. Übungsblatt (3. November 2017)

Aufgabe 11: Konvergenz und Divergenz

Geben Sie für jede der unten genannten Folgen an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist, und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

a) $a_n = 2^n$ ✏ bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert ∞ ✏

b) $a_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0 ✏

c) $a_n = -2^n = -\left(2^n\right)$ ✏ bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert $-\infty$ ✏

d) $a_n = -2^{-n} = -\frac{1}{2^n}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0 ✏

e) $a_n = (-2)^n$ ✏ unbestimmt divergent ✏

f) $a_n = (-2)^{-n} = \frac{1}{(-2)^n}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0 ✏

Aufgabe 12: Grenzwertbeweise mit der Ungleichung von Bernoulli

Zeigen Sie direkt mit Hilfe der jeweiligen Grenzwertdefinition, dass für $x > 1$ gilt:

a) $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

b) $\frac{1}{x^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Hinweis: x^n kann jeweils mit der Ungleichung von Bernoulli abgeschätzt werden.

✎

a) $a_n = x^n$

- Zu zeigen: Zu jedem $A > 0$ gibt es ein zugehöriges $N(A) > 0$, sodass gilt: $a_n > A$ für $n > N(A)$.
- Sei $A > 0$ beliebig vorgegeben.

- Vorüberlegung zur Wahl von $N(A)$:
  $a_n = x^n \geq 1 + n\,(x-1) > n\,(x-1) > A$, wenn $n > \dfrac{A}{x-1}$.
- Wähle daher $N(A) = \dfrac{A}{x-1}$.
- Dann gilt für $n > N(A)$ aufgrund der Vorüberlegung: $a_n > A$

b) $a_n = \dfrac{1}{x^n}$

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $N(\varepsilon) > 0$, sodass gilt: $|a_n - 0| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
  $|a_n - 0| = \left|\dfrac{1}{x^n}\right| = \dfrac{1}{x^n} \leq \dfrac{1}{1 + n\,(x-1)} < \dfrac{1}{n\,(x-1)} < \varepsilon$, wenn $n > \dfrac{1}{\varepsilon(x-1)}$.
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon(x-1)}$.
- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - 0| < \varepsilon$

✐

Aufgabe 13: Cauchy-Folgen

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition: Die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{5\,n-4}{3\,n+2}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Cauchy-Folge.

✎

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
  Für $n > m$ gilt:
  $$|a_n - a_m| = \left|\frac{5\,n-4}{3\,n+2} - \frac{5\,m-4}{3\,m+2}\right| = \left|\frac{(5\,n-4)(3\,m+2) - (5\,m-4)(3\,n+2)}{(3\,n+2)(3\,m+2)}\right| =$$
  $$= \left|\frac{15\,n\,m + 10\,n - 12\,m - 8 - 15\,m\,n - 10\,m + 12\,n + 8}{(3\,n+2)(3\,m+2)}\right| = \left|\frac{22\,n - 22\,m}{(3\,n+2)(3\,m+2)}\right| = \frac{22\,n - 22\,m}{(3\,m+2)(3\,n+2)} <$$
  $$< \frac{22\,n}{(3\,m+2)(3\,n+2)} < \frac{22\,n}{m\,n} = \frac{22}{m} < \varepsilon, \text{ wenn } m > \frac{22}{\varepsilon}$$

- Wähle daher $N(\varepsilon) = \dfrac{22}{\varepsilon}$.

- Dann gilt für $n > m > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a_m| < \varepsilon$

✐