Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2017/2018
Dr. Judith Fingerhuth

3. Übungsblatt (27. Oktober 2017)

Aufgabe 8: Monotone und beschränkte Folgen

b) Die Folge (b_n) sei definiert durch $b_1 = 3$ und $b_{n+1} = \frac{3\,b_n - 4}{5}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Bestimmen Sie den Grenzwert b der Folge wiederum durch Einsetzen und Auflösen, unter der (noch zu beweisenden) Annahme, dass er existiert!

   ✎

   $b = \frac{3\,b - 4}{5} \Leftrightarrow 5\,b = 3\,b - 4 \Leftrightarrow 2\,b = -4 \Leftrightarrow b = -2$

   ✐

2. Zeigen Sie dann analog zu Teilaufgabe a, dass die Folge durch diesen Grenzwert beschränkt und geeignet monoton ist (woraus nachträglich mit dem o. g. Satz folgt, dass der Grenzwert tatsächlich existiert)!

   ✎

   - Behauptung: $b_n \geq -2$ für alle $n \in \mathbb{N}$
   - Induktionsanfang $n = 1$: $b_1 = 3 \geq -2$
   - Induktionsschritt $n \to n+1$:
     $b_{n+1} = \frac{3\,b_n - 4}{5} \geq \frac{3 \cdot (-2) - 4}{5} = \frac{-10}{5} = -2$, da $b_n \geq -2$ gemäß Induktionsvoraussetzung
   - Monotonie: $b_{n+1} - b_n = \frac{3\,b_n - 4}{5} - b_n = \frac{3\,b_n - 4 - 5\,b_n}{5} = \frac{-2\,b_n - 4}{5} \leq \frac{-2 \cdot (-2) - 4}{5} = 0$,
     da $b_n \geq -2$ und somit $-2\,b_n \leq -2 \cdot (-2)$
     Daraus folgt: $b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. (b_n) ist monoton fallend.
   - Da (b_n) monoton fallend und nach unten beschränkt ist, ist die Folge nach dem o. g. Satz tatsächlich konvergent.

   ✐

c) Die Folge (c_n) sei definiert durch $c_1 = 2$ und $c_{n+1} = \frac{4 + 6\,c_n}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Wie lautet der durch Einsetzen und Auflösen ermittelte „vermeintliche“ Grenzwert?

   ✎

   $c = \frac{4 + 6\,c}{3} \Leftrightarrow 3\,c = 4 + 6\,c \Leftrightarrow -4 = 3\,c \Leftrightarrow c = -\frac{4}{3}$

   ✐

2. Welchen (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert besitzt die Folge tatsächlich?
   ✎
   $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$
   ✐

3. Beweisen Sie dies, indem Sie durch vollständige Induktion zeigen, dass $c_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt!
   ✎
   - Induktionsanfang $n = 1$: $c_1 = 2 \geq 1$
   - Induktionsschritt $n \to n+1$:
     $c_{n+1} = \frac{4+6\,c_n}{3} \geq \frac{4+6\,n}{3} > \frac{6\,n}{3} = 2\,n = n + n \geq n + 1$, da $c_n \geq n$ nach Induktionsvoraussetzung

   ✐

4. Warum liefert die „Einsetzmethode“ hier einen falschen Grenzwert?
   ✎
   - Die „Einsetzmethode“ liefert nur dann den richtigen Grenzwert, wenn dieser tatsächlich (im eigentlichen Sinn) existiert.
   - Der o. g. Satz garantiert die Existenz des Grenzwerts nur, wenn die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt oder monoton fallend und nach unten beschränkt ist.
   - Die Folge (c_n) ist zwar nach unten beschränkt, aber nicht monoton fallend.
     Tatsächlich ist sie monoton wachsend und nach oben unbeschränkt und geht daher gegen ∞.

   ✐

Aufgabe 9: Geometrische Summe

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \neq 1$: $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

   ✎

   - Induktionsanfang $n = 0$:
     (linke Seite für $n = 0$) $= \sum\limits_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$
     (rechte Seite für $n = 0$) $= \frac{q^{0+1}-1}{q-1} = \frac{q-1}{q-1} = 1$
   - Induktionsschritt $n \to n+1$:
     (linke Seite für $n+1$ statt n) =
     $\sum\limits_{k=0}^{n+1} q^k = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \underset{\substack{\text{Induktions-}\\\text{voraussetzung}}}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}\,(q-1)}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1} =$
     (rechte Seite für $n+1$ statt n)

   ✐

b) Berechnen Sie damit folgende Summe:
   Wenn man auf das erste Feld eines Schachbretts 1 Reiskorn legt, auf das zweite Feld 2, auf das dritte Feld 4, auf das vierte Feld 8 usw., wieviele Reiskörner bräuchte man insgesamt?
   ✎
   $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{63} 2^k = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 \approx 1.8 \cdot 10^{19} = 18$ Trillionen
   ✐

Aufgabe 10: Wurzelberechnungen

Berechnen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners – unter ausschließlicher Verwendung der vier Grundrechenarten – einige Dezimalstellen von $\sqrt{7}$, und zwar

a) durch fortgesetzte Intervallhalbierung (mit Anfangsintervall $[0, 8]$);

b) durch Anwendung des Heron-Verfahrens!

Welches Verfahren konvergiert schneller?

✎

a) Intervallhalbierung

- $I_1 = [a_1, b_1] = [0, 8]$,
  $c_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + b_1\right) = \frac{1}{2}(0 + 8) = 4, \quad c_1^2 = 4^2 = 16 > 7$
- $I_2 = [a_2, b_2] = [a_1, c_1] = [0, 4]$ (linke Hälfte von I_1),
  $c_2 = \frac{1}{2}\left(a_2 + b_2\right) = \frac{1}{2}(0 + 4) = 2, \quad c_2^2 = 2^2 = 4 < 7$
- $I_3 = [a_3, b_3] = [c_2, b_2] = [2, 4]$ (rechte Hälfte von I_2),
  $c_3 = \frac{1}{2}\left(a_3 + b_3\right) = \frac{1}{2}(2 + 4) = 3, \quad c_3^2 = 3^2 = 9 > 7$
- $I_4 = [a_4, b_4] = [a_3, c_3] = [2, 3]$ (linke Hälfte von I_3),
  $c_4 = \frac{1}{2}\left(a_4 + b_4\right) = \frac{1}{2}(2 + 3) = 2.5, \quad c_3^2 = 2.5^2 = 6.25 < 7$
- $I_5 = [a_5, b_5] = [c_4, b_4] = [2.5, 3]$ (rechte Hälfte von I_4),
  $c_5 = \frac{1}{2}\left(a_5 + b_5\right) = \frac{1}{2}(2.5 + 3) = 2.75, \quad c_5^2 = 2.75^2 = 7.5625 > 7$
- $I_6 = [a_6, b_6] = [a_5, c_5] = [2.5, 2.75]$ (linke Hälfte von I_5),
  $c_6 = \frac{1}{2}\left(a_6 + b_6\right) = \frac{1}{2}(2.5 + 2.75) = 2.625, \quad c_6^2 = 2.625^2 = 6.890625 < 7$
- c_6 besitzt zwei korrekte Dezimalstellen von $\sqrt{7} = 2.64575131106459$

b) Heron-Verfahren

- $a_1 = x + 1 = 7 + 1 = 8$
- $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{7}{8}\right) = 4.4375$
- $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{x}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(4.4375 + \frac{7}{4.4375}\right) = 3.0074823943662$
- $a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{x}{a_3}\right) = \ldots = 2.66750528323608$
- $a_5 = \frac{1}{2}\left(a_4 + \frac{x}{a_4}\right) = \ldots = 2.64584001478867$
- $a_6 = \frac{1}{2}\left(a_5 + \frac{x}{a_5}\right) = \ldots = 2.64575131255152$
- a_6 besitzt neun korrekte Dezimalstellen von $\sqrt{7} = 2.64575131106459$

Das Heron-Verfahren konvergiert offenbar wesentlich schneller als das Bisektionsverfahren:

- Beim Bisektionsverfahren gewinnt man durch die Intervallhalbierung in jedem Schritt genau eine Dualstelle an Genauigkeit. Wegen $\log_2 10 \approx 3.32$ braucht man pro Dezimalstelle mehr als drei Schritte.
- Das Heron-Verfahren konvergiert „quadratisch“:
  - Für den Fehler $\Delta_n = a_n - \sqrt{x}$ zwischen a_n und $\sqrt{x}$ gilt laut Vorlesung: $\Delta_{n+1} = a_{n+1} - \sqrt{x} = \frac{(a_n - \sqrt{x})^2}{2\,a_n} \approx \left(a_n - \sqrt{x}\right)^2 = \Delta_n^2$.
  - Das heißt: Wenn $\Delta_n \approx 10^{-k}$ ist (k korrekte Nachkommastellen), dann ist $\Delta_{n+1} \approx \left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$ ($2\,k$ korrekte Nachkommastellen).
  - Das bedeutet, dass sich die Anzahl korrekter Stellen in jedem Schritt etwa verdoppelt!

✐