Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

3. Übungsblatt (27. März 2017)

Aufgabe 8: Konvergenz und Divergenz

Geben Sie für jede der unten genannten Folgen an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist, und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

a) $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{5 - 4n^3}$ ✏ konvergent mit Grenzwert $-\frac{7}{4}$ ✐

b) $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{(3n^2 + 2)^2}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0, da $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{9n^4 + 12n^2 + 4}$ ✐

c) $a_n = \frac{(2n - 3n^2)(4n + 1)}{1 - 5n^2}$
✏ bestimmt divergent mit Grenzwert ∞, da $a_n = \frac{8n^2 + 2n - 12n^3 - 3n^2}{1 - 5n^2} = \frac{-12n^3 + 5n^2 + 2n}{-5n^2 + 1}$ ✐

d) $a_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ✏ unbestimmt divergent ✐

e) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0 ✐

Aufgabe 9: Indirekte Divergenzbeweise

Zeigen Sie indirekt mit Satz 4, dass die unten genannten Folgen nicht konvergent sind, indem Sie jeweils Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten angeben!

a) $a_n = n \bmod 5$
✎
Die Teilfolge $a_{5n} = (5n) \bmod 5$ ist konstant gleich 0 und besitzt daher den Grenzwert 0.
Die Teilfolge $a_{5n+1} = (5n + 1) \bmod 5$ ist konstant gleich 1 und besitzt daher den Grenzwert 1.
Daher kann die Folge (a_n) nicht konvergent sein.
✐

b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
✎
Die Teilfolge $a_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ besitzt den Grenzwert 1.

Die Teilfolge $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} + \frac{1}{2\,n-1} = -1 + \frac{1}{2\,n-1}$ besitzt den Grenzwert -1.
Daher kann die Folge (a_n) nicht konvergent sein.
✐

c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 5 - a_n$ für $n \in \mathbb{N}$

✎
Es gilt: $a_1 = 2$, $a_2 = 5 - a_1 = 5 - 2 = 3$, $a_3 = 5 - a_2 = 5 - 3 = 2$, $a_4 = 5 - a_3 = 5 - 2 = 3, \ldots$
Die Teilfolge a_{2n-1} ist konstant gleich 2 und besitzt daher den Grenzwert 2.
Die Teilfolge a_{2n} ist konstant gleich 3 und besitzt daher den Grenzwert 3.
Daher kann die Folge (a_n) nicht konvergent sein.
✐

Aufgabe 10: Monotone und beschränkte Folgen

a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $a_n \leq \frac{5}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   ✎

   - Induktionsanfang $n = 1$: $a_1 = 1 \leq \frac{5}{2}$
   - Induktionsschritt $n \to n + 1$:
     $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3} \leq \frac{\frac{5}{2} + 5}{3} = \frac{\frac{15}{2}}{3} = \frac{5}{2}$, da $a_n \leq \frac{5}{2}$ gemäß Induktionsvoraussetzung

   ✐

2. Zeigen Sie durch Abschätzen von $a_{n+1} - a_n$, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist!
   (Verwenden Sie hierfür an geeigneter Stelle die Aussage aus Teil 1!)

   ✎

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 5}{3} - a_n = \frac{a_n + 5 - 3\,a_n}{3} = \frac{5 - 2\,a_n}{3} \geq \frac{5 - 2 \cdot \frac{5}{2}}{3} = 0, \text{ da } a_n \leq \frac{5}{2} \text{ gemäß Teil 1}$$

   Daraus folgt: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. (a_n) ist monoton wachsend.
   ✐

3. Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge (der wegen Teil 1 und 2 und dem entsprechenden Satz der Vorlesung existiert) durch „Einsetzen und Auflösen", d. h. indem Sie in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ sowohl a_n als auch a_{n+1} durch a ersetzen und dann die Gleichung nach a auflösen!

   ✎
   Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$.
   Dann gilt aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte:
   $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + 5}{3} = \frac{a + 5}{3}$, d. h. $a = \frac{a + 5}{3} \Leftrightarrow 3\,a = a + 5 \Leftrightarrow 2\,a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$.
   ✐

b) Die Folge (b_n) sei definiert durch $b_1 = 3$ und $b_{n+1} = \frac{3\,b_n - 4}{5}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Bestimmen Sie den Grenzwert b der Folge wiederum durch Einsetzen und Auflösen, unter der (noch zu beweisenden) Annahme, dass er existiert!

   ✎
   $b = \frac{3\,b - 4}{5} \Leftrightarrow 5\,b = 3\,b - 4 \Leftrightarrow 2\,b = -4 \Leftrightarrow b = -2$
   ✐

2. Zeigen Sie dann analog zu Teilaufgabe a, dass die Folge durch diesen Grenzwert beschränkt und geeignet monoton ist (woraus nachträglich mit dem o. g. Satz folgt, dass der Grenzwert tatsächlich existiert)!
✎

- Behauptung: $b_n \geq -2$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang $n = 1$: $b_1 = 3 \geq -2$
- Induktionsschritt $n \to n + 1$:
  $b_{n+1} = \frac{3\,b_n - 4}{5} \geq \frac{3 \cdot (-2) - 4}{5} = \frac{-10}{5} = -2$, da $b_n \geq -2$ gemäß Induktionsvoraussetzung
- Monotonie: $b_{n+1} - b_n = \frac{3\,b_n - 4}{5} - b_n = \frac{3\,b_n - 4 - 5\,b_n}{5} = \frac{-2\,b_n - 4}{5} \leq \frac{-2 \cdot (-2) - 4}{5} = 0$,
  da $b_n \geq -2$ und somit $-2\,b_n \leq -2 \cdot (-2)$
  Daraus folgt: $b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. (b_n) ist monoton fallend.
- Da (b_n) monoton fallend und nach unten beschränkt ist, ist die Folge nach dem o. g. Satz tatsächlich konvergent.

✐

c) Die Folge (c_n) sei definiert durch $c_1 = 2$ und $c_{n+1} = \frac{4 + 6\,c_n}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Wie lautet der durch Einsetzen und Auflösen ermittelte „vermeintliche“ Grenzwert?
   ✎
   $c = \frac{4 + 6\,c}{3} \Leftrightarrow 3\,c = 4 + 6\,c \Leftrightarrow -4 = 3\,c \Leftrightarrow c = -\frac{4}{3}$
   ✐

2. Welchen (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert besitzt die Folge tatsächlich?
   ✎
   $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$
   ✐

3. Beweisen Sie dies, indem Sie durch vollständige Induktion zeigen, dass $c_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt!
   ✎

   - Induktionsanfang $n = 1$: $c_1 = 2 \geq 1$
   - Induktionsschritt $n \to n + 1$:
     $c_{n+1} = \frac{4 + 6\,c_n}{3} \geq \frac{4 + 6\,n}{3} > \frac{6\,n}{3} = 2\,n = n + n \geq n + 1$, da $c_n \geq n$ nach Induktionsvoraussetzung

   ✐

4. Warum liefert die „Einsetzmethode“ hier einen falschen Grenzwert?
   ✎

   - Die „Einsetzmethode“ liefert nur dann den richtigen Grenzwert, wenn dieser tatsächlich (im eigentlichen Sinn) existiert.
   - Der o. g. Satz garantiert die Existenz des Grenzwerts nur, wenn die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt oder monoton fallend und nach unten beschränkt ist.
   - Die Folge (c_n) ist zwar nach unten beschränkt, aber nicht monoton fallend.
     Tatsächlich ist sie monoton wachsend und nach oben unbeschränkt und geht daher gegen ∞.

   ✐