Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

2. Übungsblatt (27. März 2017)

Aufgabe 4: Geometrische Summe

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

✎

- Induktionsanfang $n = 0$:

  (linke Seite für $n = 0$) $= \sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$

  (rechte Seite für $n = 0$) $= \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1} = \frac{q - 1}{q - 1} = 1$

- Induktionsschritt $n \to n + 1$:

  (linke Seite für $n + 1$ statt n) =

  $$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \underset{\substack{\text{Induktions-}\\\text{voraussetzung}}}{=} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+1}(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} =$$

  (rechte Seite für $n + 1$ statt n)

✐

b) Berechnen Sie damit folgende Summe:
Wenn man auf das erste Feld eines Schachbretts 1 Reiskorn legt, auf das zweite Feld 2, auf das dritte Feld 4, auf das vierte Feld 8 usw., wieviele Reiskörner bräuchte man insgesamt?

✎

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{63} 2^k = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1.8 \cdot 10^{19} = 18 \text{ Trillionen}$$

✐

Aufgabe 5: Konvergenz und Divergenz

Geben Sie für jede der unten genannten Folgen an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist, und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

a) $a_n = 2^n$ ✏ bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert ∞ ✐

b) $a_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0 ✐

c) $a_n = -2^n = -\left(2^n\right)$ ✏ bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert $-\infty$ ✐

d) $a_n = -2^{-n} = -\frac{1}{2^n}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0 ✏

e) $a_n = (-2)^n$ ✏ unbestimmt divergent ✏

f) $a_n = (-2)^{-n} = \frac{1}{(-2)^n}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0 ✏

Aufgabe 6: Folgen mit bestimmten (Konvergenz-)Eigenschaften

Geben Sie jeweils eine Folge an, die die genannten Eigenschaften besitzt, sofern dies möglich ist!

a) geometrisch, streng monoton fallend, konvergent ✏ Zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{2^n}$ ✏

b) geometrisch, streng monoton fallend, bestimmt divergent ✏ Zum Beispiel: $a_n = -2^n$ ✏

c) alternierend, konvergent ✏ Zum Beispiel: $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ✏

d) alternierend, unbestimmt divergent ✏ Zum Beispiel: $a_n = (-1)^n$ ✏

e) alternierend, bestimmt divergent ✏ Unmöglich! ✏

Aufgabe 7: Grenzwertbeweise

Nennen Sie für jede der unten genannten Folgen ihren Grenzwert und beweisen Sie Ihre Aussage direkt mit Hilfe der Grenzwertdefinition, indem Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ das zugehörige $N(\varepsilon) > 0$ angeben, sodass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.

a) $a_n = \frac{5n-4}{3n+2}$

✎

Der Grenzwert lautet $a = \frac{5}{3}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
$$|a_n - a| = \left|\frac{5n-4}{3n+2} - \frac{5}{3}\right| = \left|\frac{(5n-4)\cdot 3 - 5\cdot(3n+2)}{(3n+2)\cdot 3}\right| = \left|\frac{15n - 12 - 15n - 10}{9n+6}\right| = \left|\frac{-22}{9n+6}\right| = \frac{22}{9n+6} <$$
$$< \frac{22}{9n} < \frac{22}{n} < \varepsilon, \text{ wenn } n > \frac{22}{\varepsilon}$$
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{22}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$

✐

b) $a_n = \frac{3n+2}{5n-4}$

✎

Der Grenzwert lautet $a = \frac{3}{5}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
$$\left|a_n - a\right| = \left|\frac{3n+2}{5n-4} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{(3n+2)\cdot 5 - 3\cdot(5n-4)}{(5n-4)\cdot 5}\right| = \left|\frac{15n+10-15n+12}{25n-20}\right| = \left|\frac{22}{25n-20}\right| =$$
$$= \frac{22}{24n+(n-20)} < \frac{22}{24n} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ wenn } n > 20 \text{ und } n > \frac{1}{\varepsilon}$$
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \max\left(\frac{1}{\varepsilon}, 20\right)$.
- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$

✐

c) $a_n = \dfrac{4n^2+1}{-7n^2-5}$

✎

Der Grenzwert lautet $a = -\frac{4}{7}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
$$\left|a_n - a\right| = \left|\frac{4n^2+1}{-7n^2-5} - \left(-\frac{4}{7}\right)\right| = \left|\frac{4n^2+1}{-7n^2-5} + \frac{4}{7}\right| = \left|\frac{(4n^2+1)\cdot 7 + 4\cdot(-7n^2-5)}{(-7n^2-5)\cdot 7}\right| = \left|\frac{28n^2+7-28n^2-20}{-49n^2-35}\right| =$$
$$= \left|\frac{-13}{-49n^2-35}\right| = \frac{13}{49n^2+35} < \frac{13}{49n^2} < \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ wenn } n > \frac{1}{\varepsilon}$$
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$

✐

d) Beweisen Sie, dass der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{3n+2}{5n-4}$ *nicht* $a = \frac{5}{3}$ ist, indem Sie zeigen, dass $\left|a_n - a\right|$ in diesem Fall für große n immer *größer* als ein bestimmter positiver Wert ist und daher nicht kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ sein kann!

✎

$$\left|a_n - a\right| = \left|\frac{3n+2}{5n-4} - \frac{5}{3}\right| = \left|\frac{(3n+2)\cdot 3 - 5\cdot(5n-4)}{(5n-4)\cdot 3}\right| = \left|\frac{9n+6-25n+20}{15n-12}\right| = \left|\frac{-16n+26}{15n-12}\right| = \frac{16n-26}{15n-12} >$$
$$> \frac{16n-26}{15n} = \frac{15n+(n-26)}{15n} > \frac{15n}{15n} = 1 \text{ für } n > 26$$

✐