



Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2018
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

2. Übungsblatt (9. April 2018)

Aufgabe 4: Geometrische Summe

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.



- Induktionsanfang $n = 0$:

$$(\text{linke Seite für } n = 0) = \sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1$$

$$(\text{rechte Seite für } n = 0) = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1} = \frac{q - 1}{q - 1} = 1$$

- Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

(linke Seite für $n + 1$ statt n) =

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \stackrel{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+1}(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} =$$

(rechte Seite für $n + 1$ statt n)



b) Berechnen Sie damit folgende Summe:

Wenn man auf das erste Feld eines Schachbretts 1 Reiskorn legt, auf das zweite Feld 2, auf das dritte Feld 4, auf das vierte Feld 8 usw., wieviele Reiskörner bräuchte man insgesamt?



$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots = \sum_{k=0}^{63} 2^k = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1.8 \cdot 10^{19} = 18 \text{ Trillionen}$$



Aufgabe 5: Konvergenz und Divergenz

Geben Sie für jede der unten genannten Folgen an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist, und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

a) $a_n = 2^n$ \Leftrightarrow bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert ∞ \Leftrightarrow

b) $a_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ \Leftrightarrow konvergent mit Grenzwert 0 \Leftrightarrow

c) $a_n = -2^n = -(2^n)$ \Leftrightarrow bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert $-\infty$ \Leftrightarrow

- d) $a_n = -2^{-n} = -\frac{1}{2^n}$ \Leftrightarrow konvergent mit Grenzwert 0 \Leftrightarrow
- e) $a_n = (-2)^n$ \Leftrightarrow unbestimmt divergent \Leftrightarrow
- f) $a_n = (-2)^{-n} = \frac{1}{(-2)^n}$ \Leftrightarrow konvergent mit Grenzwert 0 \Leftrightarrow

Aufgabe 6: Folgen mit bestimmten (Konvergenz-)Eigenschaften

Geben Sie jeweils eine Folge an, die die genannten Eigenschaften besitzt, sofern dies möglich ist!

- a) geometrisch, streng monoton fallend, konvergent \Leftrightarrow Zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{2^n}$ \Leftrightarrow
- b) geometrisch, streng monoton fallend, bestimmt divergent \Leftrightarrow Zum Beispiel: $a_n = -2^n$ \Leftrightarrow
- c) alternierend, konvergent \Leftrightarrow Zum Beispiel: $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ \Leftrightarrow
- d) alternierend, unbestimmt divergent \Leftrightarrow Zum Beispiel: $a_n = (-1)^n$ \Leftrightarrow
- e) alternierend, bestimmt divergent \Leftrightarrow Unmöglich! \Leftrightarrow

Aufgabe 7: Grenzwertbeweise

Nennen Sie für jede der unten genannten Folgen ihren Grenzwert und beweisen Sie Ihre Aussage direkt mit Hilfe der Grenzwertdefinition, indem Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ das zugehörige $N(\varepsilon) > 0$ angeben, sodass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.

a) $a_n = \frac{5n-4}{3n+2}$



Der Grenzwert lautet $a = \frac{5}{3}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:

$$|a_n - a| = \left| \frac{5n-4}{3n+2} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{(5n-4) \cdot 3 - 5 \cdot (3n+2)}{(3n+2) \cdot 3} \right| = \left| \frac{15n-12-15n-10}{9n+6} \right| = \left| \frac{-22}{9n+6} \right| = \frac{22}{9n+6} < \frac{22}{9n} < \frac{22}{n} < \varepsilon, \text{ wenn } n > \frac{22}{\varepsilon}$$

- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{22}{\varepsilon}$.

- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$



b) $a_n = \frac{3n+2}{5n-4}$



Der Grenzwert lautet $a = \frac{3}{5}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:

$$|a_n - a| = \left| \frac{3n+2}{5n-4} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{(3n+2) \cdot 5 - 3 \cdot (5n-4)}{(5n-4) \cdot 5} \right| = \left| \frac{15n+10-15n+12}{25n-20} \right| = \left| \frac{22}{25n-20} \right| = \frac{22}{24n+(n-20)} < \frac{22}{24n} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ wenn } n > 20 \text{ und } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

- Wähle daher $N(\varepsilon) = \max\left(\frac{1}{\varepsilon}, 20\right)$.

- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$



c) $a_n = \frac{4n^2 + 1}{-7n^2 - 5}$



Der Grenzwert lautet $a = -\frac{4}{7}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:

$$|a_n - a| = \left| \frac{4n^2 + 1}{-7n^2 - 5} - \left(-\frac{4}{7}\right) \right| = \left| \frac{4n^2 + 1}{-7n^2 - 5} + \frac{4}{7} \right| = \left| \frac{(4n^2 + 1) \cdot 7 + 4 \cdot (-7n^2 - 5)}{(-7n^2 - 5) \cdot 7} \right| = \left| \frac{28n^2 + 7 - 28n^2 - 20}{-49n^2 - 35} \right| = \left| \frac{-13}{-49n^2 - 35} \right| = \frac{13}{49n^2 + 35} < \frac{13}{49n^2} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ wenn } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.

- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$



d) Beweisen Sie, dass der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{3n+2}{5n-4}$ nicht $a = \frac{5}{3}$ ist, indem Sie zeigen, dass $|a_n - a|$ in diesem Fall für große n immer *größer* als ein bestimmter positiver Wert ist und daher nicht kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ sein kann!



$$|a_n - a| = \left| \frac{3n+2}{5n-4} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{(3n+2) \cdot 3 - 5 \cdot (5n-4)}{(5n-4) \cdot 3} \right| = \left| \frac{9n+6-25n+20}{15n-12} \right| = \left| \frac{-16n+26}{15n-12} \right| = \frac{16n-26}{15n-12} > \frac{16n-26}{15n} = \frac{15n+(n-26)}{15n} > \frac{15n}{15n} = 1 \text{ für } n > 26$$

