Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2017/2018
Dr. Judith Fingerhuth

2. Übungsblatt (20. Oktober 2017)

Aufgabe 5: Folgen mit bestimmten (Konvergenz-)Eigenschaften

Geben Sie jeweils eine Folge an, die die genannten Eigenschaften besitzt, sofern dies möglich ist!

a) geometrisch, streng monoton fallend, konvergent ✏ Zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{2^n}$ ✎

b) geometrisch, streng monoton fallend, bestimmt divergent ✏ Zum Beispiel: $a_n = -2^n$ ✎

c) alternierend, konvergent ✏ Zum Beispiel: $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ✎

d) alternierend, unbestimmt divergent ✏ Zum Beispiel: $a_n = (-1)^n$ ✎

e) alternierend, bestimmt divergent ✏ Unmöglich! ✎

Aufgabe 6: Konvergenz und Divergenz

Geben Sie für jede der unten genannten Folgen an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist, und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

a) $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{5 - 4n^3}$ ✏ konvergent mit Grenzwert $-\frac{7}{4}$ ✎

b) $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{(3n^2 + 2)^2}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0, da $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{9n^4 + 12n^2 + 4}$ ✎

c) $a_n = \frac{(2n - 3n^2)(4n + 1)}{1 - 5n^2}$

✏ bestimmt divergent mit Grenzwert ∞, da $a_n = \frac{8n^2 + 2n - 12n^3 - 3n^2}{1 - 5n^2} = \frac{-12n^3 + 5n^2 + 2n}{-5n^2 + 1}$ ✎

d) $a_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ✏ unbestimmt divergent ✎

e) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ✏ konvergent mit Grenzwert 0 ✎

Aufgabe 7: Indirekte Divergenzbeweise

Zeigen Sie indirekt mit Satz 4, dass die unten genannten Folgen nicht konvergent sind, indem Sie jeweils Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten angeben!

a) $a_n = n \bmod 5$
✎
Die Teilfolge $a_{5n} = (5\,n) \bmod 5$ ist konstant gleich 0 und besitzt daher den Grenzwert 0.
Die Teilfolge $a_{5n+1} = (5\,n + 1) \bmod 5$ ist konstant gleich 1 und besitzt daher den Grenzwert 1.
Daher kann die Folge (a_n) nicht konvergent sein.
✐

b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
✎
Die Teilfolge $a_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{2\,n} = 1 + \frac{1}{2\,n}$ besitzt den Grenzwert 1.
Die Teilfolge $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} + \frac{1}{2\,n-1} = -1 + \frac{1}{2\,n-1}$ besitzt den Grenzwert -1.
Daher kann die Folge (a_n) nicht konvergent sein.
✐

c) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 5 - a_n$ für $n \in \mathbb{N}$
✎
Es gilt: $a_1 = 2,\ a_2 = 5 - a_1 = 5 - 2 = 3,\ a_3 = 5 - a_2 = 5 - 3 = 2,\ a_4 = 5 - a_3 = 5 - 2 = 3, \ldots$
Die Teilfolge a_{2n-1} ist konstant gleich 2 und besitzt daher den Grenzwert 2.
Die Teilfolge a_{2n} ist konstant gleich 3 und besitzt daher den Grenzwert 3.
Daher kann die Folge (a_n) nicht konvergent sein.
✐

Aufgabe 8: Monotone und beschränkte Folgen

a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $a_n \leq \frac{5}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   ✎
   - Induktionsanfang $n = 1$: $a_1 = 1 \leq \frac{5}{2}$
   - Induktionsschritt $n \to n + 1$:
     $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3} \leq \frac{\frac{5}{2} + 5}{3} = \frac{\frac{15}{2}}{3} = \frac{5}{2}$, da $a_n \leq \frac{5}{2}$ gemäß Induktionsvoraussetzung

   ✐
2. Zeigen Sie durch Abschätzen von $a_{n+1} - a_n$, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist!
   (Verwenden Sie hierfür an geeigneter Stelle die Aussage aus Teil 1!)
   ✎
   $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 5}{3} - a_n = \frac{a_n + 5 - 3\,a_n}{3} = \frac{5 - 2\,a_n}{3} \geq \frac{5 - 2 \cdot \frac{5}{2}}{3} = 0$, da $a_n \leq \frac{5}{2}$ gemäß Teil 1
   Daraus folgt: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. (a_n) ist monoton wachsend.
   ✐
3. Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge (der wegen Teil 1 und 2 und dem entsprechenden Satz der Vorlesung existiert) durch „Einsetzen und Auflösen“, d. h. indem Sie in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ sowohl a_n als

auch a_{n+1} durch a ersetzen und dann die Gleichung nach a auflösen!

✎

Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$.

Dann gilt aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + 5}{3} = \frac{a+5}{3}$, d. h. $a = \frac{a+5}{3} \Leftrightarrow 3\,a = a + 5 \Leftrightarrow 2\,a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$.

✐