Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

12. Übungsblatt (26. Juni 2017)

Aufgabe 30: Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\int\limits_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

Schritt 1: Bestimmung der Stammfunktion von $x\,\mathrm{e}^x$ mit partieller Integration:
$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = (x-1)\,\mathrm{e}^x$

Schritt 2: Berechnung des Integrals:
$\int\limits_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[(x-1)\,\mathrm{e}^x\right]_{-\infty}^{0} = (0-1)\cdot\mathrm{e}^0 - \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\,\mathrm{e}^x = -1-0 = -1,$
denn nach l'Hospital ist $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\,\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-\mathrm{e}^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\mathrm{e}^x\right) = 0$

b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (Hinweis: Wie lautet die Ableitung von $\ln\left(1-x^2\right)$?)

$\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\ln\left(1-1^2\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln\left(1-0^2\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln 0 + \frac{1}{2}\ln 1 = \infty + 0 = \infty$

c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2}\ln 0 - \left(-\frac{1}{2}\ln 0\right) = \infty - \infty =$???, d. h. das Integral ist nicht definiert
(Beachte: $-\frac{1}{2}\ln 0$ ist ein uneigentlicher Wert, nämlich $\lim\limits_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\ln x\right) = \infty$, und für solche Werte gilt die gewohnte Gleichung $a - a = 0$ nicht.)

Aufgabe 31: Integralkriterium

Schätzen Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Integralkriteriums nach oben und unten ab!

a) $\sum_{k=1}^{n} k^3$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie konkret $\sum_{k=1}^{100} k^3$

$f(x) = x^3$ ist monoton steigend, $I = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^n x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^n = \frac{n^4-1}{4}$, $f(1) = 1$, $f(n) = n^3$

Daher gilt nach dem Integralkriterium: $\frac{n^4-1}{4} + 1 \le \sum_{k=1}^{n} k^3 \le \frac{n^4-1}{4} + n^3$, d. h. $\frac{n^4+3}{4} \le \sum_{k=1}^{n} k^3 \le \frac{n^4+4n^3-1}{4}$

Konkret für $n = 100$: $\frac{100^4+3}{4} \le \sum_{k=1}^{100} k^3 \le \frac{100^4+4\cdot 100^3-1}{4}$, d. h. $25\,000\,000.75 \le \sum_{k=1}^{100} k^3 \le 25\,999\,999.75$

b) $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie konkret $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist monoton fallend,

$I = \int_1^{n^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{n^2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{n^2} = -\frac{1}{n^2} - \left(-\frac{1}{1^2}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}$, $f(1) = 1$, $f\left(n^2\right) = \frac{1}{\left(n^2\right)^2} = \frac{1}{n^4}$

Daher gilt nach dem Integralkriterium: $1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \le \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k^2} \le 1 - \frac{1}{n^2} + 1 = 2 - \frac{1}{n^2}$

Konkret für $n = 10$ (!): $1 - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} \le \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{10^2}$, d. h. $0.9901 \le \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2} \le 1.99$