Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

11. Übungsblatt (22. Juni 2017)

Aufgabe 28: Partielle Integration

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe partieller Integration!
(Wenden Sie bei Teilaufgabe d nach der partiellen Integration den „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ an!)
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis bei den unbestimmten Integralen jeweils durch Differenzieren der ermittelten Stammfunktion!

a) $\displaystyle\int x \ln x \, \mathrm{d}x$

✎

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

mit $f'(x) = x$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

Probe: $\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right)' = x \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x \ln x$

✐

b) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

✎

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = [x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \left(1 \cdot \mathrm{e}^1 - 0 \cdot \mathrm{e}^0\right) - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$$

mit $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = x$, $g'(x) = 1$

✐

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = -x^2\,\mathrm{e}^{-x} + \int 2\,x\,\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x =$$
$$-x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 2\,x\,\mathrm{e}^{-x} + \int 2\,\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = -x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 2\,x\,\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} + C = -\left(x^2 + 2\,x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} + C = -\frac{x^2 + 2\,x + 2}{\mathrm{e}^x} + C$$

mit $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2\,x$ bei der ersten partiellen Integration
und $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, $g(x) = 2\,x$, $g'(x) = 2$ bei der zweiten partiellen Integration

Probe: $\left(-\left(x^2+2\,x+2\right)\mathrm{e}^{-x}\right)' = (2\,x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2+2\,x+2\right)\mathrm{e}^{-x} = x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$

✐

d) $\int \cos^2 x\;\mathrm{d}x$

✎

$\int \cos^2 x\;\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\;\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int \left(1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\;\mathrm{d}x$

mit $f'(x) = \cos x,\ f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ g'(x) = -\sin x$

$\Rightarrow 2\int \cos^2 x\;\mathrm{d}x = x + \sin x\cos x$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\;\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(x+\sin x\cos x) + C$

Probe: $\left(\frac{1}{2}\,(x+\sin x\cos x)\right)' = \frac{1}{2}\,(1+\cos x\cos x - \sin x\sin x) = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x + \left(1-\sin^2 x\right)\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\cos^2 x + \cos^2 x\right) = \cos^2 x$

✐

Aufgabe 29: Integration durch Substitution

a) Zeigen Sie: $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

Bestimmen Sie damit das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{1+x^2}\;\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Substitution $x = \varphi(t) = \tan t$ (d. h. $t = \varphi^{-1}(x) = \arctan x$)!

✎

$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$

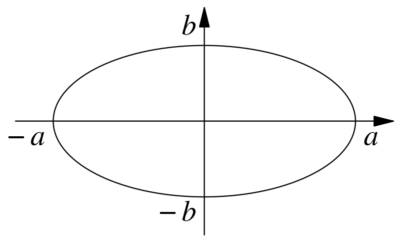
Für $x = \varphi(t) = \tan t$ gilt $\varphi'(t) = 1 + \tan^2 t$.

Substitutionsformel für unbestimmte Integrale: $\int f(x)\;\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\;\mathrm{d}t$ mit $t = \varphi^{-1}(x)$.

Das heißt hier: $\int \frac{1}{1+x^2}\;\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t = \int 1\;\mathrm{d}t = t + C = \arctan x + C$

✐

b) Für die Punkte $(x,\ y)$ einer Ellipse mit den Halbachsen a und b und Mittelpunkt $(0,\,0)$ gilt: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Lösen Sie diese Gleichung nach y auf!

Berechnen Sie dann die Fläche der halben Ellipse oberhalb der x-Achse als Integral $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\;\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Substitution $x = \varphi(t) = a\sin t$!

✎

$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Für $x = \varphi(t) = a \sin t$ gilt $\varphi'(t) = a \cos t$.

Untergrenze: $-a = \varphi(t) = a \sin t \Rightarrow \sin t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$

Obergrenze: $a = \varphi(t) = a \sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

(Unter- und Obergrenze sind nicht eindeutig bestimmt. Wir wählen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, weil in diesem Intervall $\cos t \geq 0$ und daher $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$ gilt.)

Anwendung der Substitutionsformel für bestimmte Integrale:

$$\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - \frac{(a \sin t)^2}{a^2}} \cdot a \cos t\, \mathrm{d}t = a\, b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, \mathrm{d}t = a\, b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, \mathrm{d}t =$$

$$\left[\frac{a\, b}{2}(t + \sin t \cos t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a\, b}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \frac{a\, b}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{a\, b\, \pi}{2}$$

✐