Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

10. Übungsblatt (19. Juni 2017)

Aufgabe 25: Taylorpolynome und -reihen

a) Wie lauten die Ableitungen $f^{(k)}(x)$ der Funktion $f(x) = \cos x$?
Wie lauten ihre Werte $f^{(k)}(0)$ an der Stelle 0?
Wie lautet die Taylorreihe der Funktion?

✎

- $f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$
- $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, d. h. $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$
- $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$, d. h. $f^{(2k+1)}(0) = 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$
- $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(2k)}(0)}{(2\,k)!}\, x^{2k} + \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2\,k+1)!}\, x^{2k+1} \right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$

✐

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ für $x > -1$.

(i) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\, \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ für $k = 1, 2, \ldots$

✎

Induktionsanfang $k = 1$:

$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1-1}\, \frac{(1-1)!}{(1+x)^1} =$ Behauptung für $k = 1$

Induktionsschritt $k \to k + 1$:

$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k-1}\, \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\right)' = (-1)^{k-1}\,(k-1)!\, \frac{-k}{(1+x)^{k+1}} = (-1)^k\, \frac{k!}{(1+x)^{k+1}} =$
Behauptung für $k + 1$

✐

(ii) Geben Sie für die Funktion f das Taylorpolynom n-ten Grades an!

✎

$f^{(0)}(0) = f(0) = \ln 1 = 0$

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\, \frac{(k-1)!}{(1+0)^k} = (-1)^{k-1}\,(k-1)!$ für $k = 1, 2, \ldots$

$T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{k!}\, x^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$

✐

(iii) Geben Sie das zugehörige Restglied $R_n(x, \xi)$ an und zeigen Sie, dass es für $x \in [0, 1]$ gegen 0 geht!

✎

$$R_n(x, \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da $\frac{x}{1+\xi} \in [0, 1]$ für $x \in [0, 1]$ und $\xi \in (0, x)$

✐

(iv) Welche Reihe ergibt sich konkret für $x = 1$?

✎

$$\ln 2 = f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, 1^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots,$$

d. h. der Wert der alternierenden harmonischen Reihe ist $\ln 2$.

✐

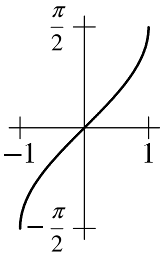
Aufgabe 26: Ableitung der Umkehrfunktion

Die Funktion $\arcsin x$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $\sin x$, wenn man diese auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ eingeschränkt, d. h. es gilt: $\sin \arcsin x = x$.

a) Wie lautet der Definitions- und Wertebereich der Funktion $\arcsin x$? Skizzieren Sie die Funktion!

✎

Definitionsbereich $D = [-1, 1]$, Wertebereich $W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



✐

b) Zeigen Sie durch Anwendung des entsprechenden Satzes der Vorlesung: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$!

(Hinweis zur Vereinfachung des resultierenden Ausdrucks: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.)

✎

Für $f(x) = \sin x$ gilt: $f'(x) = \cos x$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

✐

Aufgabe 27: Regeln von Bernoulli und de l'Hospital

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

✎

Zähler und Nenner gehen für $x \to 1$ beide gegen 0.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

✐

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

✎

Zähler und Nenner gehen für $x \to 0$ beide gegen 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

✐

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} x \ln x$

✎

Nach der Umformung in einen Bruch gehen Zähler und Nenner für $x \to 0+$ beide gegen $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

✐

d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7}{x^2 + 2\,x - 1}$

✎

Zähler und Nenner gehen für $x \to \infty$ beide gegen ∞.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7}{x^2 + 2\,x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3\,x^2 - 10\,x + 3}{2\,x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{6\,x - 10}{2} = \infty$$

✐