Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2017/2018
Dr. Judith Fingerhuth

1. Übungsblatt (13. Oktober 2017)

Aufgabe 1: Eigenschaften von Folgen

Versuchen Sie, für jede der unten genannten Folgen ihr Bildungsgesetz zu erkennen und zu formulieren, und geben Sie damit die nächsten vier Folgenglieder an! Geben Sie außerdem an, welche der in Definition 1 genannten Eigenschaften jede Folge besitzt!

a) $1, 3, 5, 7, \ldots$
✎
Bildungsgesetz: $a_n = 2\,n - 1$
Nächste Folgenglieder: 9, 11, 13, 15
Eigenschaften: arithmetisch ($d = 2$), streng monoton wachsend, nach unten beschränkt
✐

b) $1, -2, 4, -8, \ldots$
✎
Bildungsgesetz: $a_n = (-2)^{n-1}$
Nächste Folgenglieder: $16, -32, 64, -128$
Eigenschaften: geometrisch ($q = -2$), alternierend
✐

c) $1, 1, 1, 1, \ldots$
✎
Bildungsgesetz: $a_n = 1$
Nächste Folgenglieder: 1, 1, 1, 1
Eigenschaften: arithmetisch ($d = 0$), geometrisch ($q = 1$), monoton wachsend, monoton fallend, beschränkt
✐

d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$
✎
Bildungsgesetz: $a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
Nächste Folgenglieder: $\frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{127}{128}, \frac{255}{256}$
Eigenschaften: streng monoton wachsend, beschränkt
✐

e) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$
✎
Bildungsgesetz: Folge der Primzahlen
Nächste Folgenglieder: 19, 23, 29, 31

Eigenschaften: streng monoton wachsend, nach unten beschränkt
✐

f) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
✎
Bildungsgesetz: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ (Folge der Fibonacci-Zahlen)
Nächste Folgenglieder: 34, 55, 89, 144
Eigenschaften: monoton wachsend, nach unten beschränkt
✐

g) 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...
✎
Bildungsgesetz: a_n = nach n Stellen abgeschnittene Dezimalbruchdarstellung von $\sqrt{2}$
Nächste Folgenglieder: 1.41421, 1.414213, 1.4142135, 1.41421356
Eigenschaften: streng monoton wachsend, beschränkt
✐

Aufgabe 2: Folgen mit bestimmten Eigenschaften

Geben Sie jeweils eine Folge an, die die genannten Eigenschaften besitzt, sofern dies möglich ist!
Geben sie außerdem das Konvergenzverhalten der Folge an!

a) geometrisch, streng monoton wachsend ✏ Zum Beispiel: $a_n = 2^n \to \infty$ ✐

b) geometrisch, streng monoton fallend ✏ Zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ ✐

c) arithmetisch, alternierend ✏ Unmöglich! ✐

d) arithmetisch, nach oben beschränkt ✏ Zum Beispiel: $a_n = -2n \to -\infty$ ✐

e) arithmetisch, beschränkt ✏ Zum Beispiel: $a_n = 0 \to 0$ ✐

Aufgabe 3: Grenzwertbeweise

Nennen Sie für jede der unten genannten Folgen ihren Grenzwert und beweisen Sie Ihre Aussage direkt mit Hilfe der Grenzwertdefinition, indem Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ das zugehörige $N(\varepsilon) > 0$ angeben, sodass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.

a) $a_n = \frac{5n-4}{3n+2}$
✎
Der Grenzwert lautet $a = \frac{5}{3}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
$|a_n - a| = \left|\frac{5n-4}{3n+2} - \frac{5}{3}\right| = \left|\frac{(5n-4)\cdot 3 - 5\cdot(3n+2)}{(3n+2)\cdot 3}\right| = \left|\frac{15n-12-15n-10}{9n+6}\right| = \left|\frac{-22}{9n+6}\right| = \frac{22}{9n+6} <$
$< \frac{22}{9n} < \frac{22}{n} < \varepsilon$, wenn $n > \frac{22}{\varepsilon}$
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{22}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$

✐

b) $a_n = \frac{3n+2}{5n-4}$

✎

Der Grenzwert lautet $a = \frac{3}{5}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
  $|a_n - a| = \left| \frac{3n+2}{5n-4} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{(3n+2)\cdot 5 - 3\cdot(5n-4)}{(5n-4)\cdot 5} \right| = \left| \frac{15n + 10 - 15n + 12}{25n - 20} \right| = \left| \frac{22}{25n-20} \right| =$
  $= \frac{22}{24n + (n-20)} < \frac{22}{24n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, wenn $n > 20$ und $n > \frac{1}{\varepsilon}$
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \max\left(\frac{1}{\varepsilon}, 20\right)$.
- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$

✐

c) $a_n = \frac{4n^2+1}{-7n^2-5}$

✎

Der Grenzwert lautet $a = -\frac{4}{7}$.

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $N(\varepsilon)$:
  $|a_n - a| = \left| \frac{4n^2+1}{-7n^2-5} - \left(-\frac{4}{7}\right) \right| = \left| \frac{4n^2+1}{-7n^2-5} + \frac{4}{7} \right| = \left| \frac{(4n^2+1)\cdot 7 + 4\cdot(-7n^2-5)}{(-7n^2-5)\cdot 7} \right| = \left| \frac{28n^2 + 7 - 28n^2 - 20}{-49n^2 - 35} \right| =$
  $= \left| \frac{-13}{-49n^2-35} \right| = \frac{13}{49n^2+35} < \frac{13}{49n^2} < \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n} < \varepsilon$, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$
- Wähle daher $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $n > N(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$

✐

d) Beweisen Sie, dass der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{3n+2}{5n-4}$ *nicht* $a = \frac{5}{3}$ ist, indem Sie zeigen, dass $|a_n - a|$ in diesem Fall für große n immer *größer* als ein bestimmter positiver Wert ist und daher nicht kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ sein kann!

✎

$|a_n - a| = \left| \frac{3n+2}{5n-4} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{(3n+2)\cdot 3 - 5\cdot(5n-4)}{(5n-4)\cdot 3} \right| = \left| \frac{9n + 6 - 25n + 20}{15n - 12} \right| = \left| \frac{-16n + 26}{15n - 12} \right| = \frac{16n - 26}{15n - 12} >$

$> \frac{16n-26}{15n} = \frac{15n + (n-26)}{15n} > \frac{15n}{15n} = 1$ für $n > 26$

✐

Aufgabe 4: Dreiecksungleichung

Beweisen Sie die folgende verallgemeinerte Dreiecksungleichung mittels vollständiger Induktion unter Verwendung der elementaren Dreiecksungleichung: $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

✎

Induktionsanfang $n = 1$:

(linke Seite für $n = 1$) $= \left| \sum_{k=1}^{1} a_k \right| = |a_1| = \sum_{k=1}^{1} |a_k|$ = (rechte Seite für $n = 1$)

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

(linke Seite für $n + 1$ statt n) =

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \right| \underset{\substack{\text{elementare} \\ \text{Dreiecks-} \\ \text{ungleichung}}}{\le} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| + |a_{n+1}| \underset{\substack{\text{Induktions-} \\ \text{voraussetzung}}}{\le} \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| =$$

(rechte Seite für $n + 1$ statt n)

✐