



Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

1. Übungsblatt (20. März 2017)

Aufgabe 1: Dreiecksungleichung

Beweisen Sie die folgende verallgemeinerte Dreiecksungleichung mittels vollständiger Induktion unter Verwendung der elementaren Dreiecksungleichung: $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.



Induktionsanfang $n = 1$:

$$\text{(linke Seite für } n = 1) = \left| \sum_{k=1}^1 a_k \right| = |a_1| = \sum_{k=1}^1 |a_k| = \text{(rechte Seite für } n = 1)$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

(linke Seite für $n + 1$ statt n) =

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right| \stackrel{\text{elementare Dreiecksungleichung}}{\leq} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + |a_{n+1}| \stackrel{\text{Induktionsvoraussetzung}}{\leq} \sum_{k=1}^n |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| =$$

(rechte Seite für $n + 1$ statt n)



Aufgabe 2: Eigenschaften von Folgen

Versuchen Sie, für jede der unten genannten Folgen ihr Bildungsgesetz zu erkennen und zu formulieren, und geben Sie damit die nächsten vier Folgenglieder an! Geben Sie außerdem an, welche der in Definition 1 genannten Eigenschaften jede Folge besitzt!

a) 1, 3, 5, 7, ...



Bildungsgesetz: $a_n = 2n - 1$

Nächste Folgenglieder: 9, 11, 13, 15

Eigenschaften: arithmetisch ($d = 2$), streng monoton wachsend, nach unten beschränkt



b) 1, -2, 4, -8, ...



Bildungsgesetz: $a_n = (-2)^{n-1}$

Nächste Folgenglieder: 16, -32, 64, -128

Eigenschaften: geometrisch ($q = -2$), alternierend



c) 1, 1, 1, 1, ...



Bildungsgesetz: $a_n = 1$

Nächste Folgenglieder: 1, 1, 1, 1

Eigenschaften: arithmetisch ($d = 0$), geometrisch ($q = 1$), monoton wachsend, monoton fallend, beschränkt



d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$



Bildungsgesetz: $a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Nächste Folgenglieder: $\frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{127}{128}, \frac{255}{256}$

Eigenschaften: streng monoton wachsend, beschränkt



e) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...



Bildungsgesetz: Folge der Primzahlen

Nächste Folgenglieder: 19, 23, 29, 31

Eigenschaften: streng monoton wachsend, nach unten beschränkt



f) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...



Bildungsgesetz: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ (Folge der Fibonacci-Zahlen)

Nächste Folgenglieder: 34, 55, 89, 144

Eigenschaften: monoton wachsend, nach unten beschränkt



g) 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...



Bildungsgesetz: $a_n =$ nach n Stellen abgeschnittene Dezimalbruchdarstellung von $\sqrt{2}$

Nächste Folgenglieder: 1.41421, 1.414213, 1.4142135, 1.41421356

Eigenschaften: streng monoton wachsend, beschränkt



Aufgabe 3: Folgen mit bestimmten Eigenschaften

Geben Sie jeweils eine Folge an, die die genannten Eigenschaften besitzt, sofern dies möglich ist!

a) geometrisch, streng monoton wachsend \Leftrightarrow Zum Beispiel: $a_n = 2^n$ \Leftrightarrow

b) geometrisch, streng monoton fallend \Leftrightarrow Zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{2^n}$ \Leftrightarrow

c) arithmetisch, alternierend \Leftrightarrow Unmöglich! \Leftrightarrow

d) arithmetisch, nach oben beschränkt \Leftrightarrow Zum Beispiel: $a_n = -2n$ \Leftrightarrow

e) arithmetisch, beschränkt \Leftrightarrow Zum Beispiel: $a_n = 0$ \Leftrightarrow