Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

3. Übungsblatt (27. März 2017)

Aufgabe 8: Konvergenz und Divergenz

Geben Sie für jede der unten genannten Folgen an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist, und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

a) $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{5 - 4n^3}$

b) $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{(3n^2 + 2)^2}$

c) $a_n = \frac{(2n - 3n^2)(4n + 1)}{1 - 5n^2}$

d) $a_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

e) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 9: Indirekte Divergenzbeweise

Zeigen Sie indirekt mit Satz 4, dass die unten genannten Folgen nicht konvergent sind, indem Sie jeweils Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten angeben!

a) $a_n = n \bmod 5$

b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

c) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 5 - a_n$ für $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 10: Monotone und beschränkte Folgen

a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $a_n \leq \frac{5}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Zeigen Sie durch Abschätzen von $a_{n+1} - a_n$, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist! (Verwenden Sie hierfür an geeigneter Stelle die Aussage aus Teil 1!)
3. Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge (der wegen Teil 1 und 2 und dem entsprechenden Satz der Vorlesung existiert) durch „Einsetzen und Auflösen“, d. h. indem Sie in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ sowohl a_n als auch a_{n+1} durch a ersetzen und dann die Gleichung nach a auflösen!

b) Die Folge (b_n) sei definiert durch $b_1 = 3$ und $b_{n+1} = \frac{3\,b_n - 4}{5}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Bestimmen Sie den Grenzwert b der Folge wiederum durch Einsetzen und Auflösen, unter der (noch zu beweisenden) Annahme, dass er existiert!
2. Zeigen Sie dann analog zu Teilaufgabe a, dass die Folge durch diesen Grenzwert beschränkt und geeignet monoton ist (woraus nachträglich mit dem o. g. Satz folgt, dass der Grenzwert tatsächlich existiert)!

c) Die Folge (c_n) sei definiert durch $c_1 = 2$ und $c_{n+1} = \frac{4 + 6\,c_n}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1. Wie lautet der durch Einsetzen und Auflösen ermittelte „vermeintliche“ Grenzwert?
2. Welchen (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert besitzt die Folge tatsächlich?
3. Beweisen Sie dies, indem Sie durch vollständige Induktion zeigen, dass $c_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt!
4. Warum liefert die „Einsetzmethode“ hier einen falschen Grenzwert?