



Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2017/2018
Dr. Judith Fingerhuth

2. Übungsblatt (20. Oktober 2017)

Aufgabe 5: Folgen mit bestimmten (Konvergenz-)Eigenschaften

Geben Sie jeweils eine Folge an, die die genannten Eigenschaften besitzt, sofern dies möglich ist!

- a) geometrisch, streng monoton fallend, konvergent
- b) geometrisch, streng monoton fallend, bestimmt divergent
- c) alternierend, konvergent
- d) alternierend, unbestimmt divergent
- e) alternierend, bestimmt divergent

Aufgabe 6: Konvergenz und Divergenz

Geben Sie für jede der unten genannten Folgen an, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist, und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

a) $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{5 - 4n^3}$

b) $a_n = \frac{7n^3 + 2n}{(3n^2 + 2)^2}$

c) $a_n = \frac{(2n - 3n^2)(4n + 1)}{1 - 5n^2}$

d) $a_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

e) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 7: Indirekte Divergenzbeweise

Zeigen Sie indirekt mit Satz 4, dass die unten genannten Folgen nicht konvergent sind, indem Sie jeweils Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten angeben!

- a) $a_n = n \bmod 5$
- b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
- c) $a_1 = 2, a_{n+1} = 5 - a_n$ für $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 8: Monotone und beschränkte Folgen

- a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.
 1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $a_n \leq \frac{5}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 2. Zeigen Sie durch Abschätzen von $a_{n+1} - a_n$, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist!
(Verwenden Sie hierfür an geeigneter Stelle die Aussage aus Teil 1!)
 3. Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge (der wegen Teil 1 und 2 und dem entsprechenden Satz der Vorlesung existiert) durch „Einsetzen und Auflösen“, d. h. indem Sie in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{3}$ sowohl a_n als auch a_{n+1} durch a ersetzen und dann die Gleichung nach a auflösen!