



Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

10. Übungsblatt (19. Juni 2017)

Aufgabe 25: Taylorpolynome und -reihen

- a) Wie lauten die Ableitungen $f^{(k)}(x)$ der Funktion $f(x) = \cos x$?
Wie lauten ihre Werte $f^{(k)}(0)$ an der Stelle 0?
Wie lautet die Taylorreihe der Funktion?
- b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ für $x > -1$.
- Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ für $k = 1, 2, \dots$
 - Geben Sie für die Funktion f das Taylorpolynom n -ten Grades an!
 - Geben Sie das zugehörige Restglied $R_n(x, \xi)$ an und zeigen Sie, dass es für $x \in [0, 1]$ gegen 0 geht!
 - Welche Reihe ergibt sich konkret für $x = 1$?

Aufgabe 26: Ableitung der Umkehrfunktion

Die Funktion $\arcsin x$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $\sin x$, wenn man diese auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ einschränkt, d. h. es gilt: $\sin \arcsin x = x$.

- a) Wie lautet der Definitions- und Wertebereich der Funktion $\arcsin x$? Skizzieren Sie die Funktion!
- b) Zeigen Sie durch Anwendung des entsprechenden Satzes der Vorlesung: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$!
(Hinweis zur Vereinfachung des resultierenden Ausdrucks: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.)

Aufgabe 27: Regeln von Bernoulli und de l'Hospital

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 1}$