HTW Aalen, Studiengang Informatik

Analysis

Vorlesung im Wintersemester 2017/18
Dr. Judith Fingerhuth

Zwischenklausur am 30.11.2017 – Musterlösung

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Betrachten Sie die drei Folgen, deren Folgenglieder für alle $n \in \mathbb{N}$ durch die Vorschrift in der Tabelle angegeben sind.
Geben Sie an, welche der aufgeführten Eigenschaften die Folgen besitzen, indem Sie die entsprechenden Felder in der Tabelle ankreuzen. Geben Sie zudem an, welches Konvergenzverhalten die Folge hat (konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent) und den Grenzwert, sofern dieser existiert.

Gruppe A

	nach oben beschränkt	nach unten beschränkt	alternierend	geometrisch	arithmetisch	monoton wachsend	monoton fallend	Konvergenzverhalten	Grenzwert
$2n+3$		X			X	X		best. div.	$+\infty$
$\frac{(-3)^n}{5^n}$	X	X	X	X				konvergent	0
$(n \mod 2) - \frac{1}{2}$	X	X	X	X				unbest. div.	ex. nicht

Gruppe B

	nach oben beschränkt	nach unten beschränkt	alternierend	geometrisch	arithmetisch	monoton wachsend	monoton fallend	Konvergenzverhalten	Grenzwert
$\frac{3^n}{5^n}$	X	X		X			X	konvergent	0
$7n - 2n^2$	X							best. div.	$-\infty$
$(n \mod 2) \cdot \frac{1}{2^n}$	X	X						konvergent	0

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Folge, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

Gruppe A

a) geometrisch, nach unten beschränkt, konvergent

z.B. $\frac{1}{2^n}$, $-\frac{1}{3^n}$, $(-\frac{1}{4})^n$

b) arithmetisch, monoton fallend, bestimmt divergent

z.B. $-n$, $-2n$

c) alternierend, beschränkt, divergent

z.B. $(-1)^n$, $3 \cdot (-1)^n$

Gruppe B

a) geometrisch, monoton fallend, konvergent

z.B. $\frac{1}{2^n}$

b) arithmetisch, nach oben beschränkt, bestimmt divergent

z.B. $-n$, $-2n$

c) alternierend, unbeschränkt, divergent

z.B. $(-3)^n$, $\left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{array} \right\}$

Aufgabe 3 (12 Punkte) – Gruppe A

Wie lautet der Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n^2+7}{2n^2+5}$ für $n \in \mathbb{N}$?
Beweisen Sie Ihre Aussage direkt mit Hilfe der Grenzwertdefinition.

Lösung

Behauptung: (a_n) konvergiert gegen $a = \frac{3}{2}$.
z.z. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig.
Betrachte $|a_n - a|$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|\frac{3n^2+7}{2n^2+5} - \frac{3}{2}\right| \\ &= \left|\frac{(3n^2+7)\cdot 2 - 3\cdot(2n^2+5)}{2\cdot(2n^2+5)}\right| = \left|\frac{6n^2+14-6n^2-15}{4n^2+10}\right| = \left|\frac{-1}{4n^2+10}\right| = \frac{1}{4n^2+10} \\ &< \frac{1}{4n^2} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Die Ungleichheitsabschätzungen können zu verschiedenen Zeitpunkten abgebrochen werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, abzuschließen, je nach gemachter Abschätzung, z.B.

- Wähle also $N > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Dann ist für $n > N$: $|a_n - a| = \frac{1}{4n^2+10} < \frac{1}{4n^2} < \frac{1}{4N^2} < \varepsilon$
- Wähle also $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Dann ist für $n > N$: $|a_n - a| = \frac{1}{4n^2+10} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} < \varepsilon$
- Wähle also $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist für $n > N$: $|a_n - a| = \frac{1}{4n^2+10} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

Aufgabe 3 (12 Punkte) – Gruppe B

Wie lautet der Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n^2+2}{4n^2+2}$ für $n \in \mathbb{N}$?
Beweisen Sie Ihre Aussage direkt mit Hilfe der Grenzwertdefinition.

Lösung

Behauptung: (a_n) konvergiert gegen $a = \frac{3}{2}$.
z.z. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig.
Betrachte $|a_n - a|$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|\frac{3n^2+2}{4n^2+2} - \frac{3}{4}\right| \\ &= \left|\frac{(3n^2+2)\cdot 4 - 3\cdot(4n^2+2)}{2\cdot(4n^2+2)}\right| = \left|\frac{12n^2+8-12n^2-6}{4\cdot(4n^2+2)}\right| = \left|\frac{2}{4\cdot(4n^2+2)}\right| = \left|\frac{1}{8n^2+4}\right| = \frac{1}{8n^2+4} \\ &< \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Die Ungleichheitsabschätzungen können zu verschiedenen Zeitpunkten abgebrochen werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, abzuschließen, je nach gemachter Abschätzung, z.B.

- Wähle also $N > \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon}}$. Dann ist für $n > N$: $|a_n - a| = \frac{1}{8n^2+4} < \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8N^2} < \varepsilon$
- Wähle also $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Dann ist für $n > N$: $|a_n - a| = \frac{1}{8n^2+4} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} < \varepsilon$
- Wähle also $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist für $n > N$: $|a_n - a| = \frac{1}{8n^2+4} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

Aufgabe 4 (15 Punkte) – Gruppe A

Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{5a_n - 4}{7}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und geben Sie den Grenzwert an. Zeigen Sie dazu:

- (a_n) ist beschränkt durch -2.
- (a_n) ist monoton.
- Ziehen Sie daraus den richtigen Schluss und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Lösung

- (a_n) ist nach unten beschränkt durch -2. Beweis durch vollständige Induktion.
  Induktionsanfang: $a_1 = 3 > -2$ ✓
  Induktionsschritt: Es gelte $a_n > -2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Z.z: Dann ist auch $a_{n+1} > -2$.
  $a_{n+1} = \frac{5a_n - 4}{7} > \frac{5 \cdot (-2) - 4}{7} = \frac{-14}{7} = -2$ ✓✓
  Also ist $a_n > -2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist (a_n) ist nach unten beschränkt durch -2.
  ($a_n \geq -2$ hätte genügt.)
- Betrachte $a_{n+1} - a_n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
  Es ist $a_{n+1} - a_n = \frac{5a_n - 4}{7} - a_n = \frac{5a_n - 4 - 7a_n}{7} = \frac{-2a_n - 4}{7} < \frac{4-4}{7} = \frac{0}{7} = 0$
  (da $a_n > -2$ (Teil 1) $\Leftrightarrow -a_n < 2 \Leftrightarrow -2a_n < 4$).
  Damit ist (a_n) monoton fallend. (Sogar streng monoton fallend.)
- Da (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt ist, ist (a_n) konvergent. Damit konvergiert jede Teilfolge von (a_n) gegen den selben Grenzwert wie (a_n) selber, insbesondere ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.
  Außerdem gelten die Rechenregeln für konvergente Folgen.
  Mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist also: $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5a_n - 4}{7} = \frac{5 \lim_{n\to\infty} a_n - 4}{7} = \frac{5a-4}{7}$,
  also $a = \frac{5a-4}{7} \Leftrightarrow 7a = 5a - 4 \Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2$
- Es gilt also $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$.

Aufgabe 4 (15 Punkte) – Gruppe B

Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_1 = -3$ und $a_{n+1} = \frac{5a_n - 4}{7}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und geben Sie den Grenzwert an. Zeigen Sie dazu:

- (a_n) ist beschränkt durch -2.
- (a_n) ist monoton.
- Ziehen Sie daraus den richtigen Schluss und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Lösung

- (a_n) ist nach oben beschränkt durch -2. Beweis durch vollständige Induktion.
  Induktionsanfang: $a_1 = -3 < -2$ ✓
  Induktionsschritt: Es gelte $a_n < -2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Z.z: Dann ist auch $a_{n+1} < -2$.
  $a_{n+1} = \frac{5a_n - 4}{7} < \frac{5 \cdot (-2) - 4}{7} = \frac{-14}{7} = -2$✓✓
  Also ist $a_n < -2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist (a_n) ist nach oben beschränkt durch -2.
  ($a_n \leq -2$ hätte genügt.)
- Betrachte $a_{n+1} - a_n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
  Es ist $a_{n+1} - a_n = \frac{5a_n - 4}{7} - a_n = \frac{5a_n - 4 - 7a_n}{7} = \frac{-2a_n - 4}{7} > \frac{4-4}{7} = \frac{0}{7} = 0$
  (da $a_n < -2$ (Teil 1) $\Leftrightarrow -a_n > 2 \Leftrightarrow -2a_n > 4$).
  Damit ist (a_n) monoton wachsend. (Sogar streng monoton wachsend.)
- Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist (a_n) konvergent. Damit konvergiert jede Teilfolge von (a_n) gegen den selben Grenzwert wie (a_n) selber, insbesondere ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.
  Außerdem gelten die Rechenregeln für konvergente Folgen.
  Mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist also: $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5a_n - 4}{7} = \frac{5 \lim_{n\to\infty} a_n - 4}{7} = \frac{5a-4}{7}$,
  also $a = \frac{5a-4}{7} \Leftrightarrow 7a = 5a - 4 \Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2$
- Es gilt also $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$.

Aufgabe 5 (15 Punkte) – Gruppe A

Geben Sie für die folgenden Reihen an, ob sie absolut konvergent, bedingt konvergent oder divergent sind. Begründen Sie, warum.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3k+1}{7k}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{7k-5}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{9}{5^k+7}$

Lösung

a) Es ist $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+1}{7k} = \frac{3}{7} \neq 0$.
(a_k) ist also keine Nullfolge, damit ist die Reihe **nicht konvergent** nach dem *Nullfolgenkriterium.*

b) Verwende das Quotientenkriterium. Es ist $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)^3}{4^{k+1}} \frac{4^k}{k^3}\right| = \left|\frac{(k+1)^3}{4k^3}\right| = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^3$.
Da $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{4} \cdot 1^3 = \frac{1}{4} < 1$, ist die Reihe **absolut konvergent** nach dem *Quotientenkriterium.*

c) Die Reihe ist alternierend, und $\left|\frac{(-1)^k}{7k-5}\right| = \frac{1}{7k-5}$ ist eine monotone Nullfolge.
Damit ist die Reihe **konvergent** nach dem *Leibnizkriterium.*
Zur Untersuchung der absoluten/bedingten Konvergenz betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{7k-5}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7k-5}$.
Es ist $\frac{1}{7k-5} > \frac{1}{7k} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{k}$. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht konvergent ist und $\frac{1}{7k-5} > \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{k}$, ist $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{7k-5}\right|$ nach dem Vergleichskriterium also nicht konvergent.
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{7k-5}$ ist also nur **bedingt konvergent**.

d) Verwende das Vergleichskriterium. Es ist $\left|\frac{9}{5^k+7}\right| = \frac{9}{5^k+7} < \frac{9}{5^k} = 9 \cdot \frac{1}{5^k} = 9 \cdot (\frac{1}{5})^k$.
Da die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ für $q = \frac{1}{5}$ konvergent ist und $\left|\frac{9}{5^k+7}\right| < 9 \cdot (\frac{1}{5})^k$, ist die Reihe **absolut konvergent** nach dem *Vergleichskriterium.*

Aufgabe 5 (15 Punkte) – Gruppe B

Geben Sie für die folgenden Reihen an, ob sie absolut konvergent, bedingt konvergent oder divergent sind. Begründen Sie, warum.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{7k+1}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5k-3}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5}{7^k+9}$

Lösung

a) Es ist $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{3k}{7k+1} = \frac{3}{7} \neq 0$.
(a_k) ist also keine Nullfolge, damit ist die Reihe **nicht konvergent** nach dem *Nullfolgenkriterium.*

b) Verwende das Quotientenkriterium. Es ist $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)^4}{3^{k+1}} \frac{3^k}{k^4}\right| = \left|\frac{(k+1)^4}{3k^4}\right| = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^4$.
Da $\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{3} \cdot 1^4 = \frac{1}{3} < 1$, ist die Reihe **absoulut konvergent** nach dem *Quotientenkriterium.*

c) Die Reihe ist alternierend, und $|\frac{(-1)^k}{5k-3}| = \frac{1}{5k-3}$ ist eine monotone Nullfolge.
Damit ist die Reihe **konvergent** nach dem *Leibnizkriterium.*
Zur Untersuchung der absoluten/bedingten Konvergenz betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{5k-3}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k-3}$.
Es ist $\frac{1}{5k-3} > \frac{1}{5k} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{k}$. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht konvergent ist und $\frac{1}{5k-3} > \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{k}$, ist $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{5k-3}\right|$ nach dem Vergleichskriterium also nicht konvergent.
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5k-3}$ ist also nur **bedingt konvergent**.

d) Verwende das Vergleichskriterium. Es ist $\left|\frac{5}{7^k+9}\right| = \frac{5}{7^k+9} < \frac{5}{7^k} = 5 \cdot \frac{1}{7^k} = 5 \cdot (\frac{1}{7})^k$.
Da die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ für $q = \frac{1}{7}$ konvergent ist und $\left|\frac{5}{7^k+9}\right| < 5 \cdot (\frac{1}{7})^k$, ist die Reihe **absolut konvergent** nach dem *Vergleichskriterium.*