



Analysis

Vorlesung im Sommersemester 2013
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

Zwischenprüfung am 14. Juni 2013

Hinweise

- Tragen Sie oben Name und Matrikelnummer ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren Lösungen ab!
- Das einzige zulässige Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes A4-Blatt.
- Jeder Täuschungsversuch führt zum Verlust des Übungsscheins.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis bereit!
- Schreiben Sie nicht mit Rotstift oder Bleistift!

1	2	3	4	Summe
9	9	12	10	40

Aufgabe 1: Eigenschaften von Folgen [9 Punkte]

Geben Sie für jede unten genannte Folge an, welche der Eigenschaften 1 bis 10 sie besitzt und nennen Sie ggf. den (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwert!

1. arithmetisch
2. geometrisch
3. alternierend
4. monoton wachsend
5. monoton fallend
6. nach oben beschränkt
7. nach unten beschränkt
8. konvergent
9. bestimmt divergent
10. unbestimmt divergent

a) $a_n = 2n + 1$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $a_n = \frac{1}{n}$

Aufgabe 2: Folgen mit bestimmten Eigenschaften [9 Punkte]

Geben Sie jeweils eine Folge an, die die genannten Eigenschaften besitzt!

- a) geometrisch, streng monoton wachsend, divergent
- b) geometrisch, streng monoton wachsend, konvergent
- c) alternierend, beschränkt, konvergent

Aufgabe 3: Monotone und beschränkte Folgen [12 Punkte]

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 7$ und $a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{5}$ für $n \in \mathbb{N}$.

- a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton ist, und geben Sie an, ob sie wachsend oder fallend ist!
- c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge, sofern er existiert!

Aufgabe 4: Konvergenzbeweise [10 Punkte]

Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5n+2} = \frac{3}{5}$ direkt mit Hilfe der Grenzwertdefinition, d. h. geben Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ das zugehörige $N(\varepsilon) > 0$ an, für das gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.