

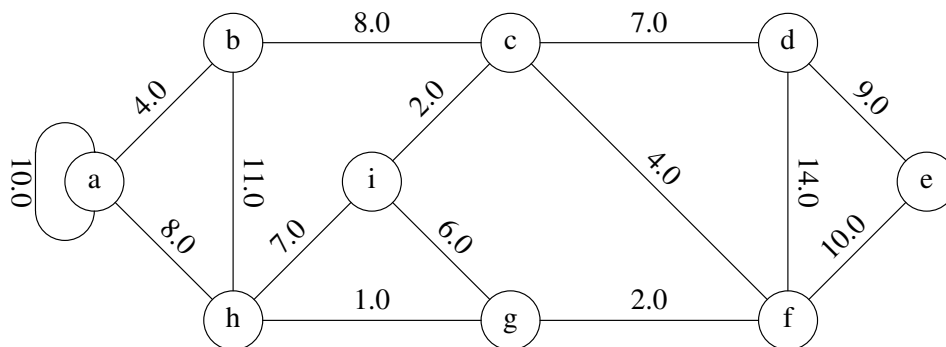
Algorithmen und Datenstrukturen 2

Vorlesung im Wintersemester 2016/2017
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

6. Übungsblatt (16. Januar 2017)

Aufgabe 14: Minimale Spann bäume

Bestimmen Sie mit den Algorithmen von Prim (Startknoten e) und Kruskal alle möglichen minimalen Spann bäume des folgenden Graphen! („Alle möglichen“ bedeutet: Wenn es an einer Stelle eines Algorithmus mehrere Möglichkeiten gibt, sollen sie alle der Reihe nach betrachtet werden.)





Algorithmus von Prim

	v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	
Initialisierung	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞	∞	∞	∞		∞	∞	∞	∞	$u = e$
1. Durchlauf	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞	∞	∞	9 e		10 e	∞	∞	∞	$u = d$
2. Durchlauf	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞	∞	7 d			10 e	∞	∞	∞	$u = c$
3. Durchlauf	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞	8 c				4 c	∞	∞	2 c	$u = i$
4. Durchlauf	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞	8 c				4 c	6 i	7 i		$u = f$
5. Durchlauf	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞	8 c					2 f	7 i		$u = g$
6. Durchlauf	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞	8 c						1 g		$u = h$
7. Durchlauf (Variante 1)	$\delta(v)$ $\pi(v)$	8 h	8 c								$u = a$
8. Durchlauf (Variante 1)	$\delta(v)$ $\pi(v)$		4 a								$u = b$
7. Durchlauf (Variante 2)	$\delta(v)$ $\pi(v)$	8 h	8 c								$u = b$
8. Durchlauf (Variante 2)	$\delta(v)$ $\pi(v)$	4 b									$u = a$

Am Ende des 7. Durchlaufs kann entweder a (Variante 1) oder b (Variante 2) aus der Vorrangwarteschlange entnommen werden.

Der minimale Spannbaum besteht dann aus den Kanten

- $\{ h, a \}, \{ a, b \}, \{ d, c \}, \{ e, d \}, \{ c, f \}, \{ f, g \}, \{ g, h \}, \{ c, i \}$ (Variante 1)
- $\{ b, a \}, \{ c, b \}, \{ d, c \}, \{ e, d \}, \{ c, f \}, \{ f, g \}, \{ g, h \}, \{ c, i \}$ (Variante 2)

Algorithmus von Kruskal

Die Kanten in werden in folgender Reihenfolge verarbeitet:

- $\{ g, h \}$ wird verwendet.
- In beliebiger Reihenfolge werden $\{ c, i \}$ und $\{ f, g \}$ verwendet.
- In beliebiger Reihenfolge werden $\{ a, b \}$ und $\{ c, f \}$ verwendet.
- $\{ g, i \}$ wird übersprungen.
- In beliebiger Reihenfolge wird $\{ c, d \}$ verwendet und $\{ h, i \}$ übersprungen.

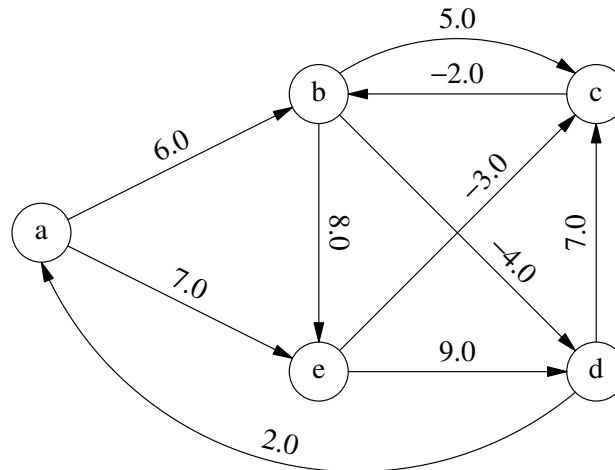
- Entweder { a, h } oder { b, c } wird verwendet und die andere Kante übersprungen.
- { d, e } wird verwendet.
- In beliebiger Reihenfolge werden { a, a } und { e, f } übersprungen.
- { b, h } wird übersprungen.
- { d, f } wird übersprungen.

Damit ergeben sich die gleichen minimalen Spannbäume wie beim Algorithmus von Prim.



Aufgabe 15: Algorithmus von Bellman und Ford

Gegeben sei der folgende Graph:



Führen Sie auf diesem Graphen den Algorithmus von Bellman und Ford mit Startknoten a aus. Durchlaufen Sie die Kanten dabei jeweils in alphabetischer Reihenfolge: (a, b), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), ...

Ändern Sie das Gewicht der Kante (d, a) von 2 auf 1 und wiederholen Sie dann die Ausführung des Algorithmus!



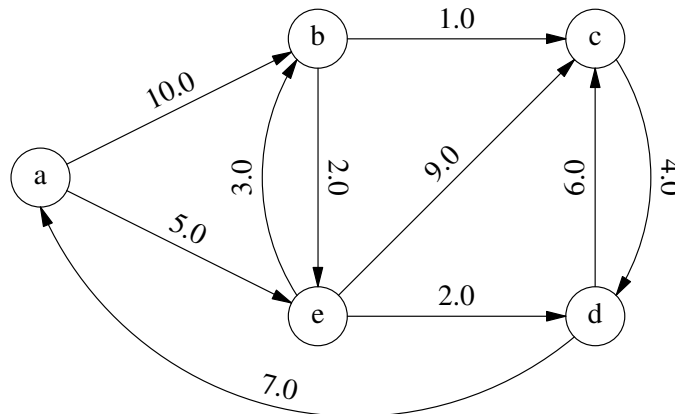
	v	a	b	c	d	e
Initialisierung	$\delta(v)$	0	∞	∞	∞	∞
	$\pi(v)$	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
1. Durchlauf	$\delta(v)$	0	6	4	2	7
	$\pi(v)$	\perp	a	e	b	a
2. Durchlauf	$\delta(v)$	0	2	4	2	7
	$\pi(v)$	\perp	c	e	b	a
3. Durchlauf (original)	$\delta(v)$	0	2	4	-2	7
	$\pi(v)$	\perp	c	e	b	a
4. Durchlauf (original)	$\delta(v)$	0	2	4	-2	7
	$\pi(v)$	\perp	c	e	b	a
3. Durchlauf (geändert)	$\delta(v)$	-1	2	4	-2	7
	$\pi(v)$	d	c	e	b	a
4. Durchlauf (geändert)	$\delta(v)$	-1	2	3	-2	6
	$\pi(v)$	d	c	e	b	a

Beim geänderten Graphen mit $\rho(d, a) = 1$ ist a, e, c, b, d, a ein negativer Zyklus mit Gesamtgewicht -1. In diesem Fall bricht der Algorithmus am Ende ab, weil für die Kante (c, b) gilt: $\delta(c) + \rho(c, b) = 3 + (-2) = 1 < 2 = \delta(b)$.



Aufgabe 16: Algorithmus von Dijkstra

Führen Sie auf dem folgenden Graphen den Algorithmus von Dijkstra mit Startknoten a aus:





	v	a	b	c	d	e
Initialisierung	$\delta(v)$	0	∞	∞	∞	∞
	$\pi(v)$	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
$u = a$	$\delta(v)$		10	∞	∞	5
	$\pi(v)$		a	\perp	\perp	a
$u = e$	$\delta(v)$		8	14	7	
	$\pi(v)$		e	e	e	
$u = d$	$\delta(v)$		8	13		
	$\pi(v)$		e	d		
$u = b$	$\delta(v)$			9		
	$\pi(v)$			b		
$u = c$	$\delta(v)$					
	$\pi(v)$					



Führen Sie den Algorithmus von Dijkstra auch – unzulässigerweise – auf dem Graphen aus Aufgabe 10 aus und vergleichen Sie die Ergebnisse!



	v	a	b	c	d	e
Initialisierung	$\delta(v)$	0	∞	∞	∞	∞
	$\pi(v)$	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
$u = a$	$\delta(v)$		6	∞	∞	7
	$\pi(v)$		a	\perp	\perp	a
$u = b$	$\delta(v)$			11	2	7
	$\pi(v)$			b	b	a
$u = d$	$\delta(v)$			9		7
	$\pi(v)$			d		a
$u = e$	$\delta(v)$			4		
	$\pi(v)$			e		
$u = c$	$\delta(v)$					
	$\pi(v)$					

Da der Graph aus Aufgabe 10 Kanten mit negativem Gewicht enthält, darf der Algorithmus von Dijkstra eigentlich nicht verwendet werden. Tatsächlich sind die von ihm berechneten Werte $\delta(b)$ und $\delta(e)$ falsch.

