Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen 2

Vorlesung im Wintersemester 2018/2019
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

2. Übungsblatt (5. November 2018)

Aufgabe 5: Vorrangwarteschlangen

Führen Sie auf einer anfangs leeren Vorrangwarteschlange nacheinander die unten genannten Operationen aus und stellen Sie die interne Struktur der Warteschlange nach jeder Operation dar!

Die Warteschlange soll

a) eine Maximum-Vorrangwarteschlange sein, die durch eine binäre Halde der Größe 8 implementiert ist.

b) eine Minimum-Vorrangwarteschlange sein, die durch eine Binomial-Halde implementiert ist.

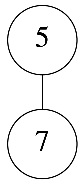
1. Einfügen eines Objekts mit Priorität 5
✎

5							

✐

2. Einfügen eines Objekts mit Priorität 7
✎

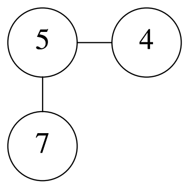
7	5						



✐

3. Einfügen eines Objekts mit Priorität 4
✎

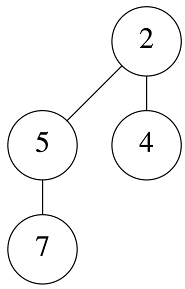
7	5	4					



✐

4. Einfügen eines Objekts mit Priorität 2
✎

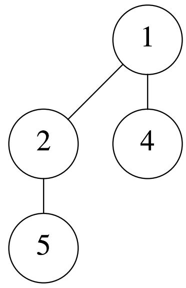
7	5	4	2				



✐

5. Ändern der Priorität 7 auf 1
✎

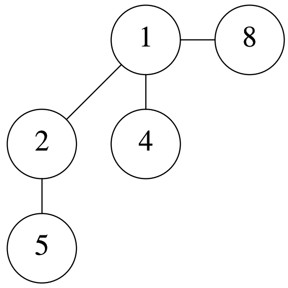
5	2	4	1				



✐

6. Einfügen eines Objekts mit Priorität 8
✎

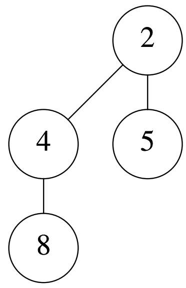
8	5	4	1	2			



✐

7. Entnehmen eines Objekts mit maximaler bzw. minimaler Priorität (je nach Art der Warteschlange)
✎

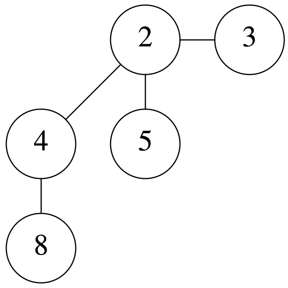
5	2	4	1				



✐

8. Einfügen eines Objekts mit Priorität 3
✎

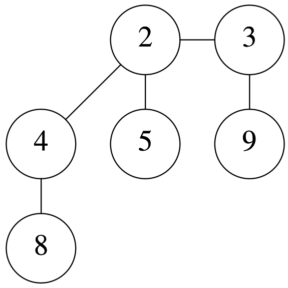
5	3	4	1	2			



✐

9. Einfügen eines Objekts mit Priorität 9
✎

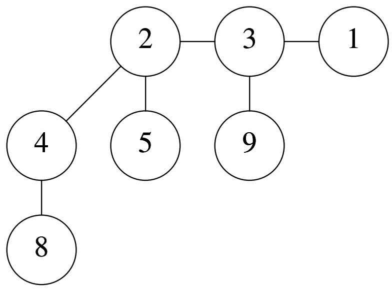
9	3	5	1	2	4		



✐

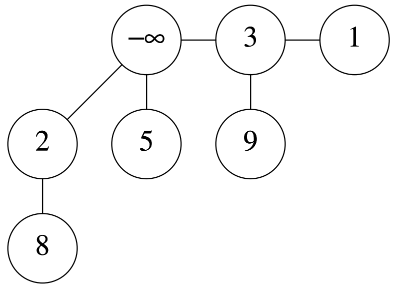
10. Einfügen eines Objekts mit Priorität 1
✎

9	3	5	1	2	4	1	



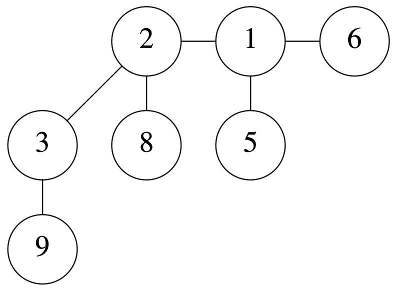
✐

11. Ändern der Priorität 4 auf 6
✎
Zwischenschritt:

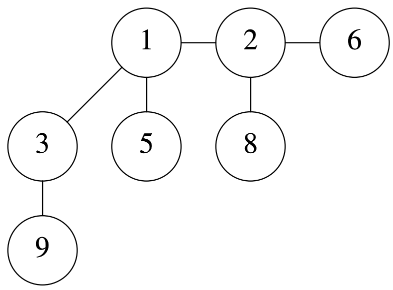


Endergebnis entweder:

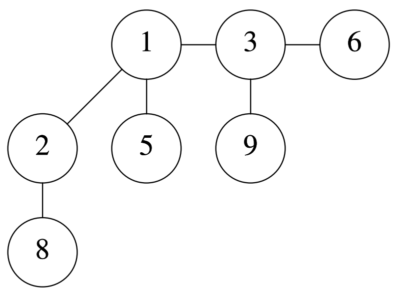
9	3	6	1	2	5	1	



Oder:



Oder:



✐

Aufgabe 6: Binomialbäume

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

Für jeden Binomial-Baum mit Grad $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1. Die Tiefe des Baums ist k.
2. Der Grad seines Wurzelknotens ist k.
3. Der Grad aller anderen Knoten ist kleiner als k.
4. Die Nachfolger des Wurzelknotens sind Binomial-Bäume mit Grad $k-1, \ldots, 0$.
5. Der Baum besitzt 2^k Knoten.
6. Auf Ebene l ($l = 0, \ldots, k$) gibt es genau $\binom{k}{l}$ Knoten.

Betrachten Sie für den Induktionsschritt $k-1 \to k$ einen Binomialbaum mit Grad k, der aus zwei Binomialbäumen mit Grad $k-1$ entstanden ist, die die o. g. Eigenschaften (für $k-1$ statt k) aufgrund der Induktionsvoraussetzung bereits erfüllen. Verwenden Sie an geeigneter Stelle die bekannte Formel $\binom{k}{l} = \binom{k-1}{l-1} + \binom{k-1}{l}$ für $k = 1, 2, \ldots$ und $l = 1, \ldots, k-1$.

✎

- Induktionsanfang $k = 0$:
  Für einen Binomial-Baum mit Grad 0 sind die Aussagen offenbar korrekt.
  (Beachte: $\binom{0}{0} = 1$.)
- Induktionsschritt $k-1 \to k$:
  Betrachte einen Binomial-Baum B mit Grad k, der aus zwei Bäumen B_1 und B_2 mit Grad $k-1$ entstanden ist, indem B_1 zu einem Nachfolger von B_2 gemacht wurde.

  1. Da B_1 und B_2 gemäß Induktionsvoraussetzung beide Tiefe $k-1$ besitzen und B_1 als Nachfolger in B_2 eingesetzt wird, besitzt der resultierende Baum B offenbar Tiefe k.
  2. Da der Wurzelknoten von B_2 gemäß Induktionsvoraussetzung Grad $k-1$ besitzt und B_1 als weiterer Nachfolger hinzukommt, besitzt der Wurzelknoten des resultierenden Baums B offenbar Grad k.
  3. Alle anderen Knoten von B entsprechen Knoten von B_1 oder B_2 und besitzen deshalb gemäß Induktionsvoraussetzung jeweils höchstens Grad $k-1$.
  4. Ein Nachfolger von B ist gemäß Konstruktion der Baum B_1 mit Grad $k-1$.
     Die übrigen Nachfolger von B sind gemäß Konstruktion die Nachfolger von B_2, die gemäß Induktionsvoraussetzung Binomial-Bäume mit Grad $k-2, \ldots, 0$ sind.
  5. Da B_1 und B_2 gemäß Induktionsvoraussetzung jeweils 2^{k-1} Knoten besitzen, besitzt der resultierende Baum B gemäß Konstruktion $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ Knoten.
  6. Jeder Baum besitzt auf Ebene $l = 0$ genau $1 = \binom{k}{0} = \binom{k}{l}$ Knoten.

     Auf Ebene $l = 1, \ldots, k-1$ besitzt der Baum B gemäß Konstruktion und Induktionsvoraussetzung die $\binom{k-1}{l-1}$ Knoten der Ebene $l-1$ von B_1 sowie die $\binom{k-1}{l}$ Knoten der Ebene l von B_2, d. h. insgesamt $\binom{k-1}{l-1} + \binom{k-1}{l} = \binom{k}{l}$ Knoten.

Auf Ebene $l = k$ besitzt der Baum B gemäß Konstruktion und Induktionsvoraussetzung den $\binom{k-1}{l-1} = 1 = \binom{k}{l}$ Knoten von B_1.

✐